

# WATER ROCKETS

Principios básicos



Cohetes de agua como recurso educativo: desde la motivación científicotecnológica hasta la participación en un concurso

# Índice

1. Introducción
2. Estudio del movimiento
3. Simulación

# Índice

## 1. Introducción

- ¿Qué son los waterrockets?
- ¿Cómo son los waterrockets?
- ¿Qué ocurre durante un lanzamiento?

## 2. Estudio del movimiento

## 3. Simulación

# Introducción

## ¿Qué son los *water rockets*?

La respuesta a esta pregunta es bastante obvia, son “cohetes de agua”. Pero... ¿qué quiere decir exactamente “cohete de agua”? Para empezar, peguemos un rápido vistazo al diccionario de (RAE) a ver qué es un cohete:

**Cohete (2):** Artefacto que se mueve en el espacio por propulsión a chorro y que se puede emplear como arma de guerra o como instrumento de investigación científica.

Parece que está un poco más claro, pero ahora tenemos que ver qué es eso de “propulsión a chorro”:

**Propulsión a chorro:** Procedimiento empleado para que un avión, proyectil, cohete, etc., avance en el espacio, por efecto de la reacción producida por la descarga de un fluido que es expulsado a gran velocidad por la parte posterior.

Es decir, que un *water rocket* es un artefacto que avanza al descargar agua a gran velocidad por su parte posterior. Sencillo.

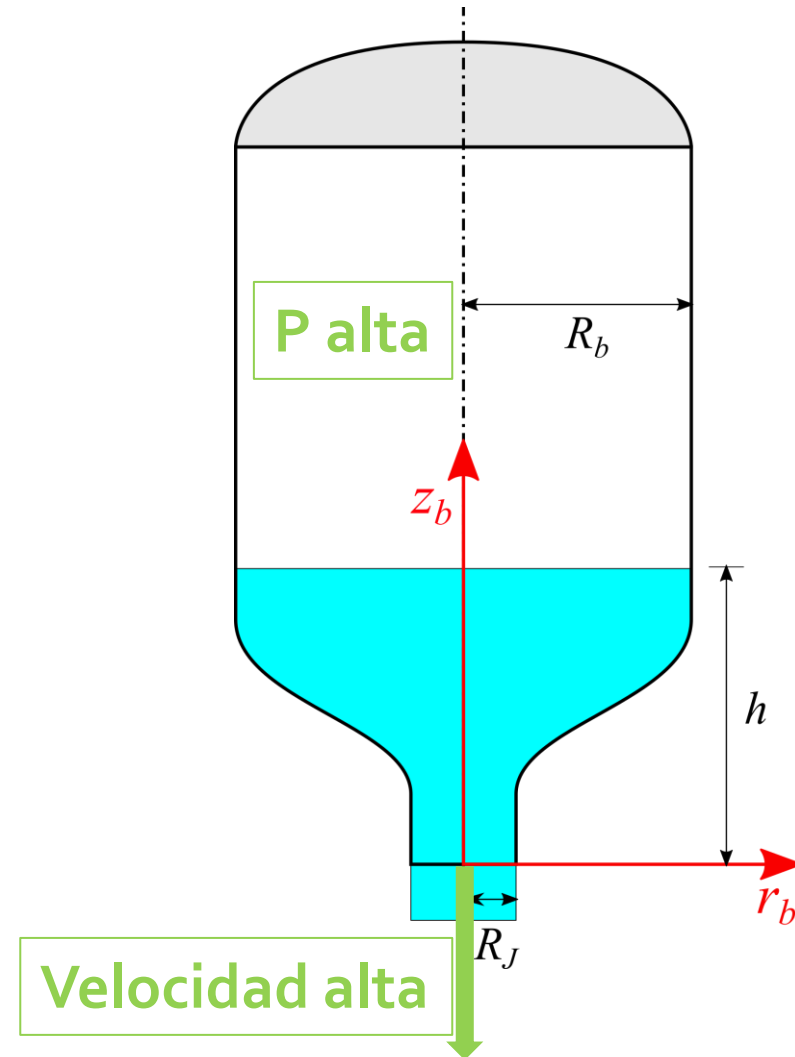
# Introducción

## ¿Qué son los *water rockets*?

En definitiva, un *water rocket* basa su propulsión en la expulsión de un chorro de agua por la abertura de una botella de agua.

La expulsión del **chorro a gran velocidad está causada por la elevada presión (P)** del aire que está en la parte superior de la botella.

Para que la botella ascienda, el chorro ha de apuntar hacia abajo, es decir, con la botella al revés. Esto se produce por **conservación del momento**.



Cohetes de agua como recurso educativo: desde la motivación científicotecnológica hasta la participación en un concurso

# Introducción

## ¿Qué son los *water rockets*?

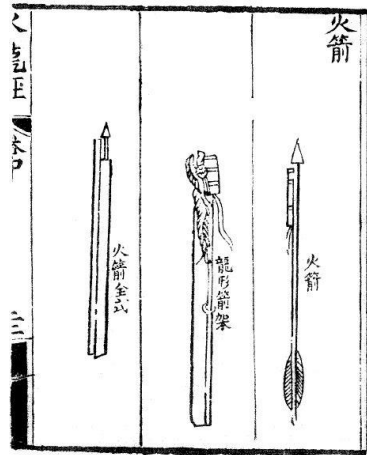
La idea de usar propulsión a chorro para mover cohetes y otros artefactos es muy antigua, y no siempre ha sido con fines militares o de investigación.



Aeolipile, Herón (S. I)

Knight's American Mechanical Dictionary, 1876.

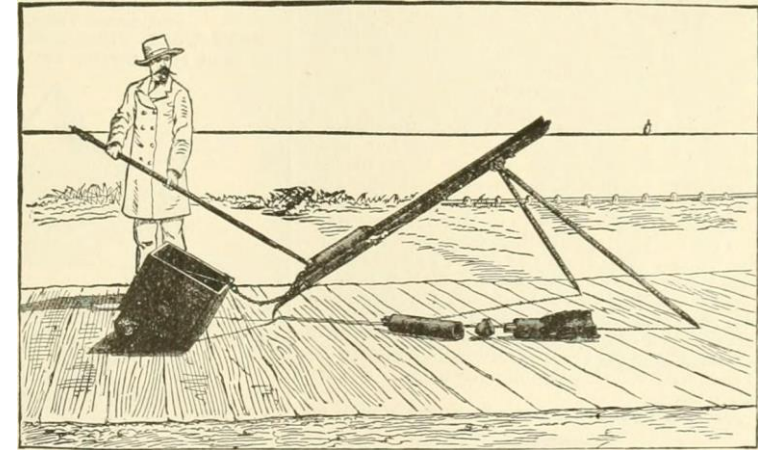
[Wikimedia Commons](#)



Flecha de fuego, Dinastía Ming (S. XIV)

火龙经 (Huolongjing), 1395.

[Wikimedia Commons](#)



Cohete de salvamento, Henry Trengrouse (S. XIX)

Alexander Lyle: *Report on Foreign Life-saving Apparatus*, 1880.

[Wikimedia Commons](#)

# Introducción

## ¿Qué son los *water rockets*?

Veamos algunos hitos en la historia reciente de los cohetes:

- 1633 - [Lagâri Hasan Çelebi](#): cohete con 7 **aletas** propulsado por 60 kg de pólvora en Estambul.
- 1798 - [Tipu Sultan](#), Rey de [Mysore](#) en India, usa cohetes **de hierro** contra la armada británica.
- 1813 - "A Treatise on the Motion of Rockets" de [William Moore](#) – deduce la **ecuación del cohete**
- 1931 - [Friedrich Schmiedl](#) intenta desarrollar un **servicio postal** a base de cohetes en Austria.
- 1933 - [Sergei Korolev](#) y [Mikhail Tikhonravov](#) lanzan el primer cohete con **líquido como propulsor**.
- 1957 – Lanzamiento del [Sputnik 1](#), **primer satélite artificial**.
- 1963 - US [X-15](#) rocket-plane, primera nave especial propulsada **reutilizable**.
- 1985 – Primer evento anual de **vuelo de cohetes amateur** en Escocia (incluyen *water rockets*).
- 2020 –Este curso.

# Introducción

## ¿Qué son los *water rockets*?

Clasificación por impulso y **NO** necesidad de permisos especiales.



Class (Base 26)	Total Impulse (N-s)	Total Impulse (lbf-s)	Aerospace Vehicle or Rocket(s)	US Requirements
Micro	0–0.3125	0–0.07		
1/4A	0.3126–0.625	0.071–0.14		
1/2A	0.626–1.25	0.141–0.28		
A	1.26–2.50	0.281–0.56		
B	2.51–5.00	0.561–1.12		
C	5.01–10.0	1.121–2.25		
D	10.01–20.0	2.251–4.5		
E	20.01–40.0	4.51–8.99		
F	40.01–80.0	8.991–18.0		
G	80.01–160	18.01–36.0		Largest model rocket motor according to TRA and NAR.
H	160.01–320	36.01–71.9		Level 1 Certification required from Tripoli or NAR. Under 125g propellant is Federal Aviation Administration exempt.
I	320.01–640	71.9–144		
J	640.01–1,280	144.01–288		Level 2 Certification required from Tripoli or NAR.
K	1,280.01–2,560	288.01–576		
L	2,560.01–5,120	576.01–1,151		
M	5,120.01–10,240	1,151.01–2,302		Level 3 Certification required from Tripoli or NAR.
N	10,240.01–20,480	2,302.01–4,604		
O	20,480.01–40,960	4,604.01–9,208		
P	40,960–81,920	9,210–18,400		FAA/AST Permit or License required.
Q	81,920–163,840	18,400–36,800		
R	163,840–327,680	36,800–73,700	USCRPL's Traveler IV <sup>[4]</sup>	
S	327,680–655,360	73,700–147,000	WAC Corporal CSXT GoFast <sup>[5]</sup> DARE's Stratos III <sup>[6]</sup>	Largest motor used by amateurs. <sup>[7]</sup>

*The remainder of this chart is an application of consumer rocket nomenclature to professional rockets which do not use this nomenclature at all.*

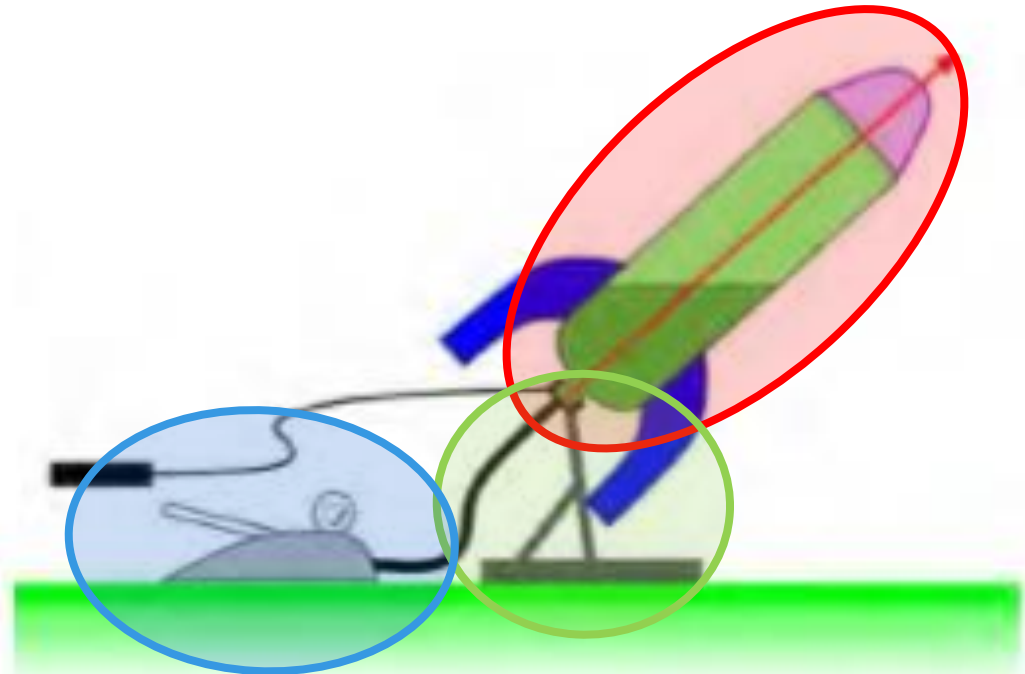


# Introducción

## ¿Cómo son los *water rockets*?

Podemos considerar que los cohetes de agua están compuestos básicamente por tres partes:

- a) El proyectil, es decir, el cohete en sí mismo
- b) La lanzadera
- c) El compresor

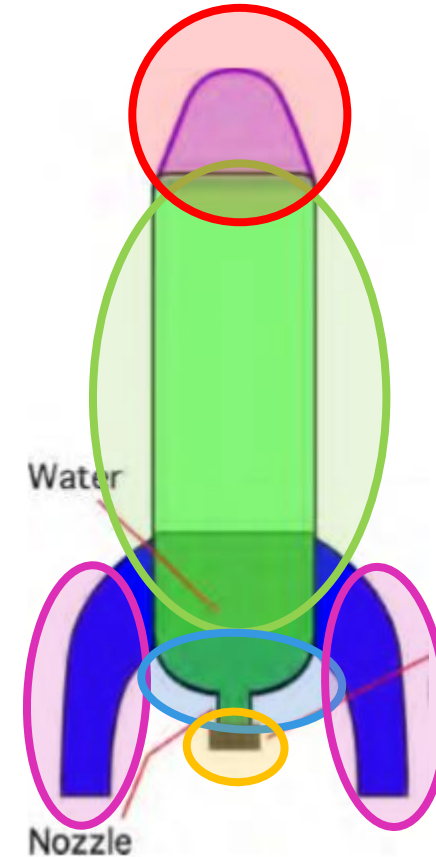


# Introducción

## ¿Cómo son los *water rockets*?

El proyectil está compuesto, a su vez, por las siguientes partes:

- a) Cápsula
- b) Depósito
- c) Eyector
- d) Aletas
- e) Junta



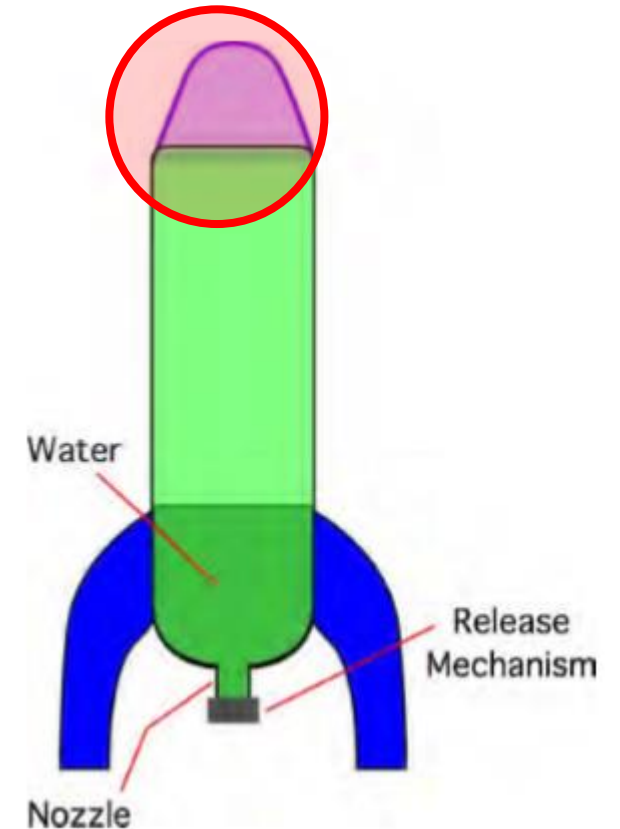
# Introducción

## ¿Cómo son los *water rockets*?

El proyectil está compuesto, a su vez, por las siguientes partes:

### a) Cápsula:

- Parte frontal, más expuesta al aire cuando avanza el proyectil y a impactos, sea contra el suelo o contra otros elementos.
- Se busca que su forma sea suave, a fin de reducir la resistencia aerodinámica del proyectil en su avance (ver Diapositiva 43).
- En ella se pueden colocar distintos elementos, como sensores, controladores, pesos, paracaídas, etc.



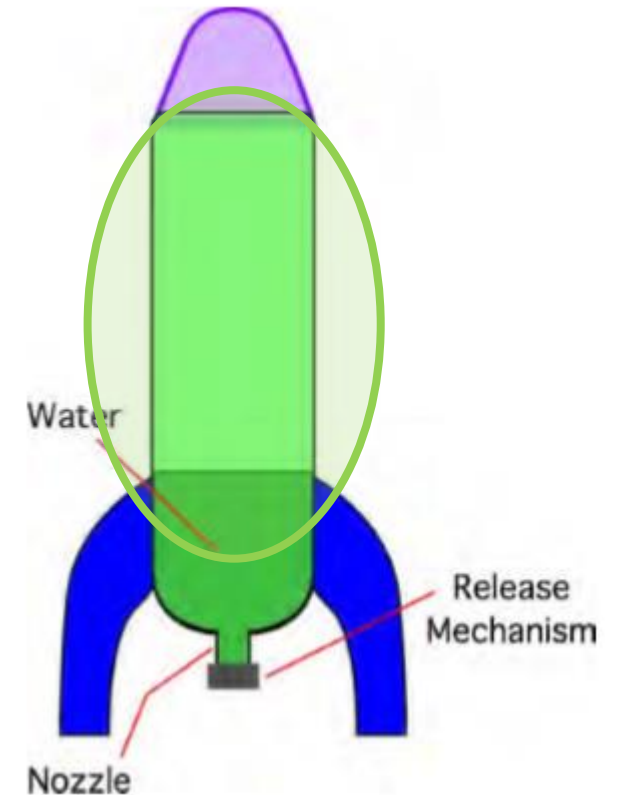
# Introducción

## ¿Cómo son los *water rockets*?

El **proyector** está compuesto, a su vez, por las siguientes partes:

### b) Depósito:

- Parte central, destinada a alojar el combustible (mezcla de agua y aire).
- Se busca que sea resistente para poder aguantar las grandes presiones a las que se somete el combustible (ver Diapositiva 49).
- Se busca también que sea alargada, para ofrecer menor resistencia al aire y desplazar el centro de gravedad hacia arriba (ver Diapositivas 43 y 57).



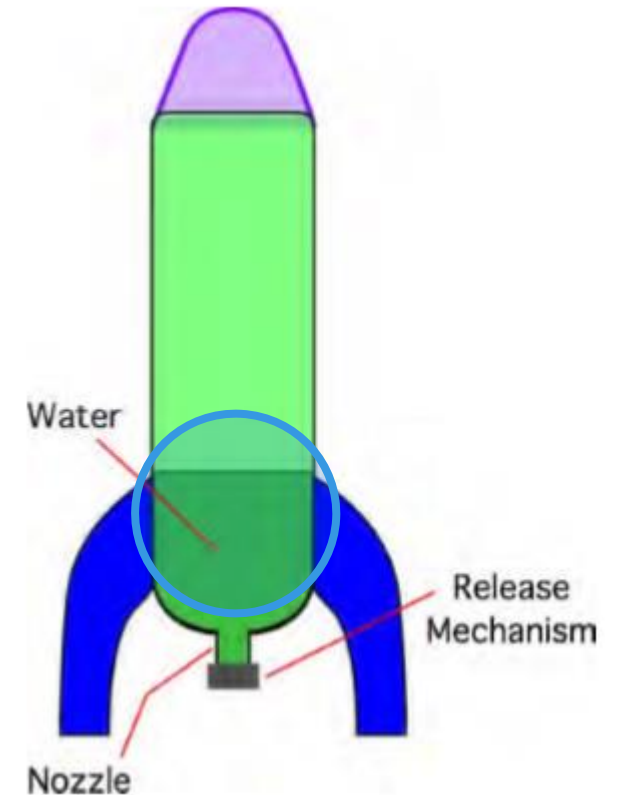
# Introducción

## ¿Cómo son los *water rockets*?

El **proyector** está compuesto, a su vez, por las siguientes partes:

### c) Eyector:

- Parte trasera, destinada a desalojar el combustible y proporcionar la propulsión.
- Se busca que sea de menor sección que el depósito para que la propulsión sea efectiva durante más tiempo.
- Se busca también que su enlace con el depósito no sea abrupto, lo que introduciría fuertes pérdidas de energía al desalojar el combustible (ver Diapositiva 50).



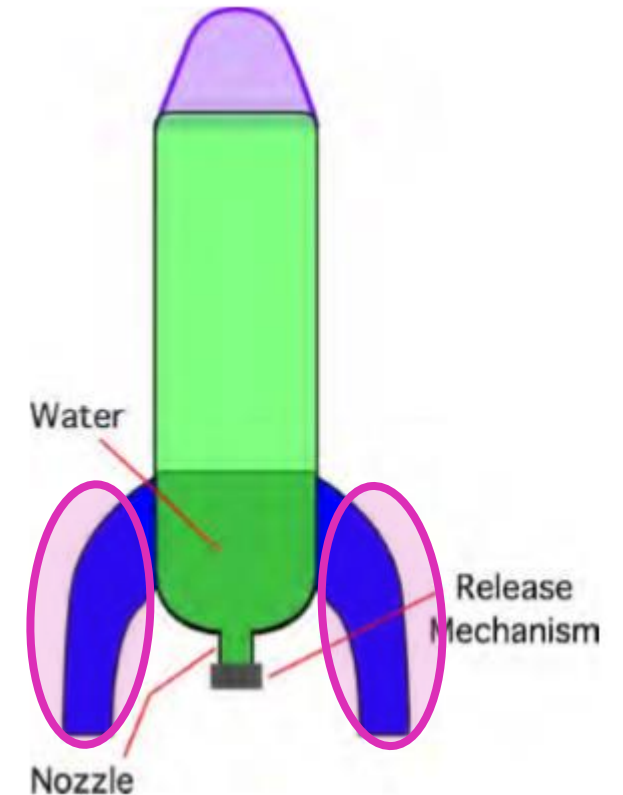
# Introducción

## ¿Cómo son los *water rockets*?

El **proyectil** está compuesto, a su vez, por las siguientes partes:

### d) Aletas:

- Partes dispuestas alrededor del cohete para estabilizar su movimiento.
- Se busca que no opongan resistencia al avance el proyectil, por lo que suelen construirse en forma de láminas delgadas (ver Diapositiva 43).
- Se busca también que estén ubicadas hacia la parte trasera del proyectil para mejorar la estabilidad (ver Diapositiva 57).



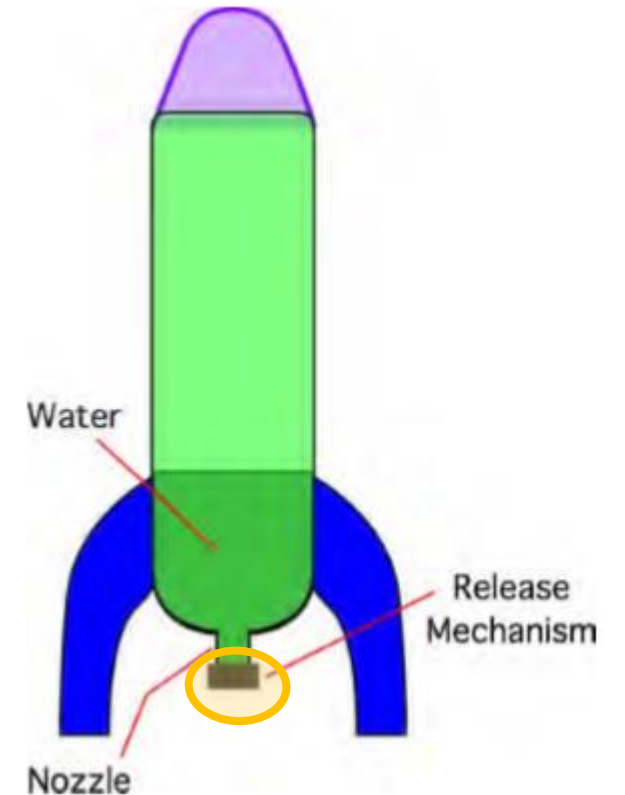
# Introducción

## ¿Cómo son los *water rockets*?

El **proyectil** está compuesto, a su vez, por las siguientes partes:

e) Junta:

- Parte posterior que enlaza el proyectil a la lanzadera.
- Se busca que impida la fuga de combustible mientras se carga el depósito.
- También se busca que sea ligera para mantener el centro de gravedad elevado y mantener la estabilidad (ver Diapositiva 57).

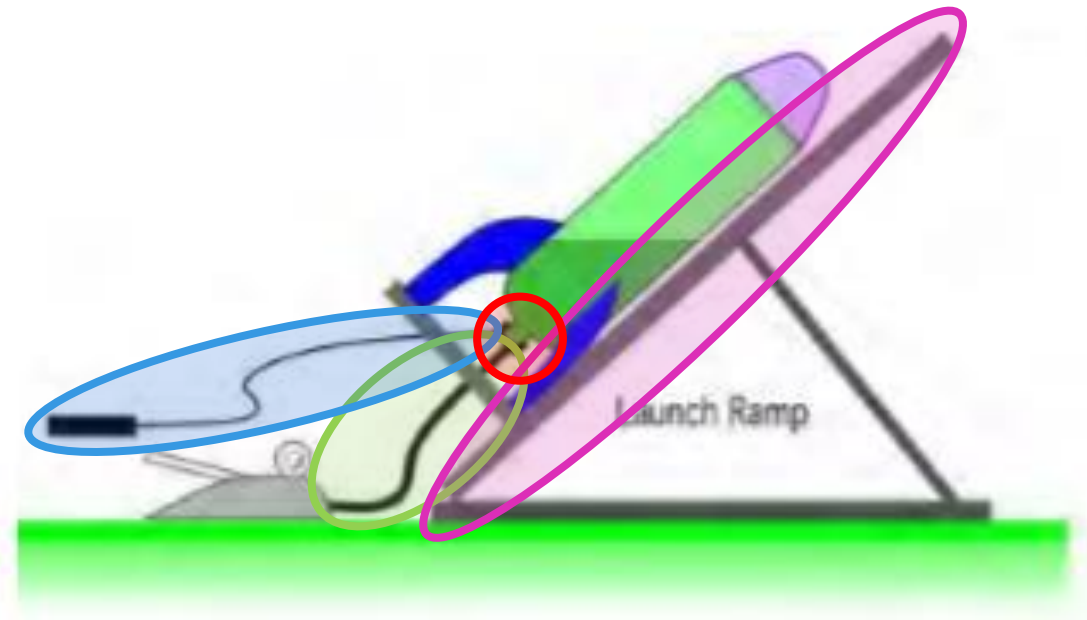


# Introducción

## ¿Cómo son los *water rockets*?

La lanzadera está compuesta, a su vez, por las siguientes partes:

- a) Liberador (*release*)
- b) Tubo de llenado
- c) Accionador (*trigger*)
- d) Estabilizadores





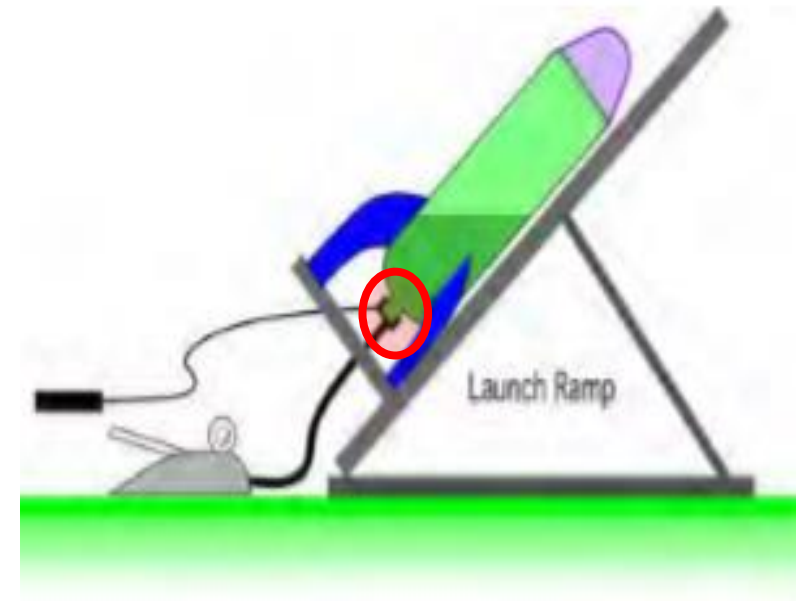
# Introducción

## ¿Cómo son los *water rockets*?

La lanzadera está compuesta, a su vez, por las siguientes partes:

### a) Liberador:

- Parte móvil que enlaza con el proyectil, que lo sujeta antes del lanzamiento y destinada a separarse del mismo.
- Se busca que su mecanismo de separación/liberación sea rápido y uniforme (ha de liberar todo el contorno del eyector a la vez).



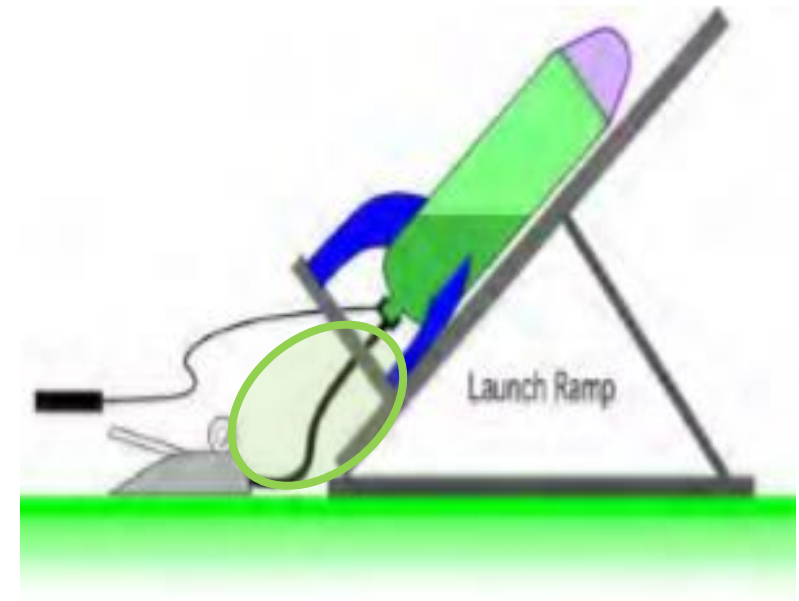
# Introducción

## ¿Cómo son los *water rockets*?

La lanzadera está compuesta, a su vez, por las siguientes partes:

### b) Tubo de llenado:

- Tubo que comunica el compresor con el depósito, pasando a través de la salida del eyector.
- El tubo ha de soportar la presión que proporcione el compresor.
- Hay que ser cuidadoso en las uniones del tubo con el compresor y con el depósito para evitar fugas.
- El tubo no puede adherirse al proyectil, ya que viajaría con él. Por ello se suele embocar junto con el accionador, haciendo de tapa del depósito.



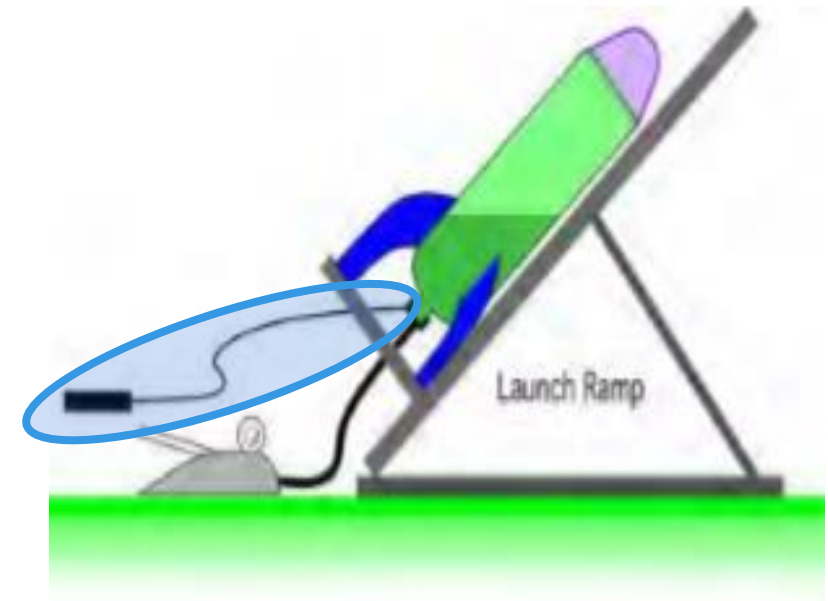
# Introducción

## ¿Cómo son los *water rockets*?

La lanzadera está compuesta, a su vez, por las siguientes partes:

### c) Accionador:

- Sistema destinado a accionar el mecanismo de liberación.
- Puede ser tanto mecánico como electromagnético.



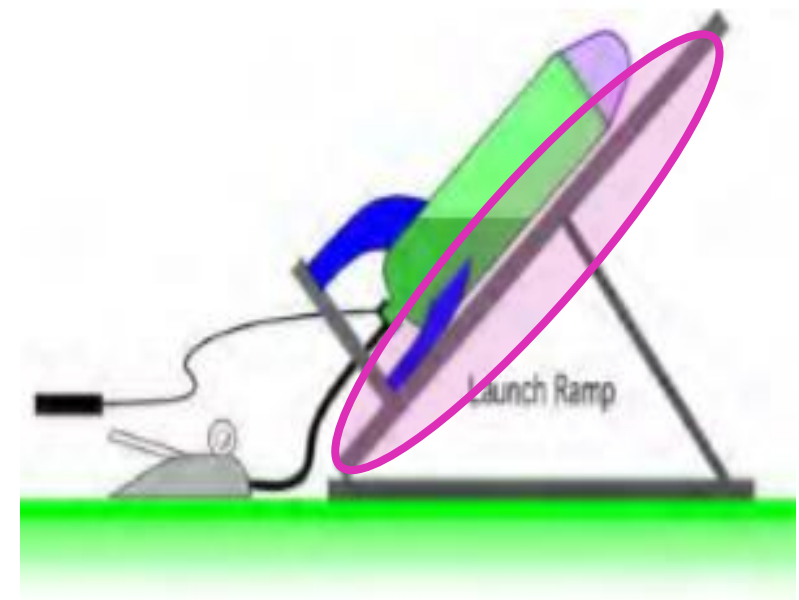
# Introducción

## ¿Cómo son los *water rockets*?

La lanzadera está compuesta, a su vez, por las siguientes partes:

### d) Estabilizador:

- Partes que se disponen bajo o alrededor del cohete para estabilizar su movimiento en la fase inicial de su recorrido.
- Se busca que no opongan resistencia al avance del proyectil sobre las mismas, por lo se trata de minimizar la superficie de contacto estabilizador-proyectil y su construcción con materiales poco rugosos.

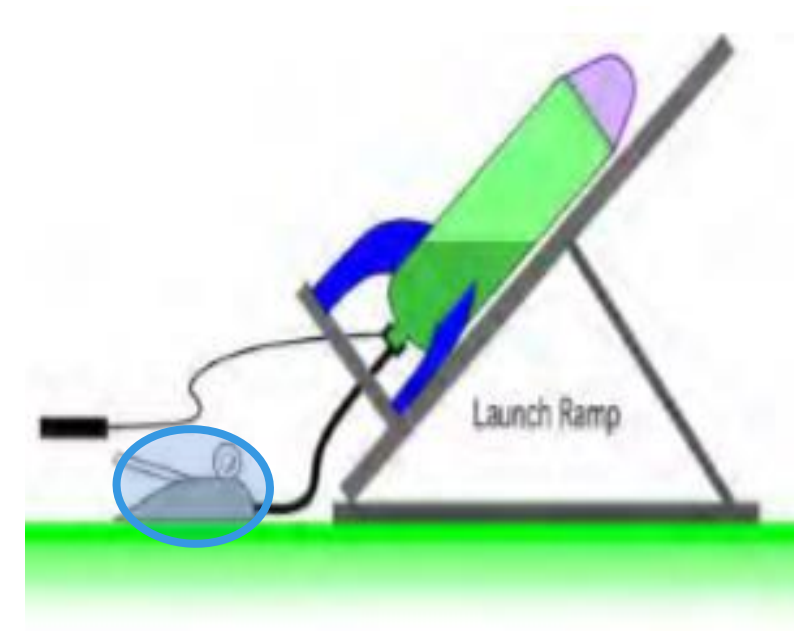


# Introducción

## ¿Cómo son los *water rockets*?

El **compresor** es un sistema capaz de presurizar el combustible del depósito.

- Aunque se pueden usar compresores para agua, es más común (y eficiente) utilizar un compresor de aire.
- Como los compresores de aire tienen un coste económico elevado, es posible utilizar una bomba convencional.
- En cualquier caso, el sistema ha de incorporar un sensor de presión (como por ejemplo un manómetro) para saber la presión a la que se está sometiendo el combustible.



# Introducción

## ¿Qué ocurre durante su lanzamiento?

- Es una fiesta
- Accidentes, pérdidas y roturas de cohetes
- Cosas curiosas
- Gente muy loca (más accidentes)
- Gente más loca aún (abstenerse)

[VID](#)

[VID](#)

[VID](#)

[VID](#)

[VID](#)

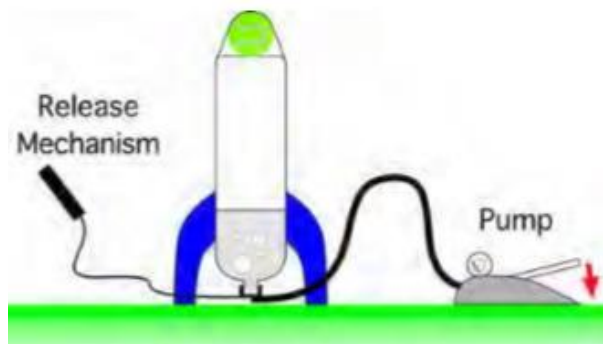
# Introducción

## ¿Qué ocurre durante su lanzamiento?

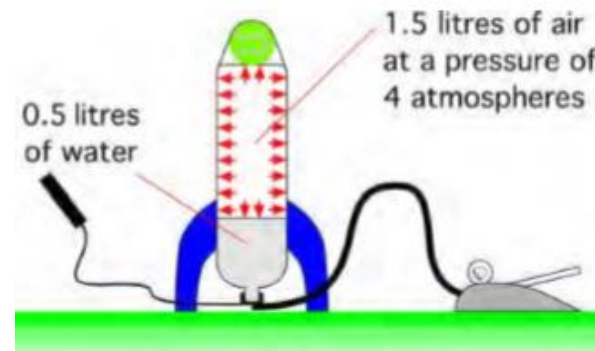
Fases del lanzamiento:

Preparación.

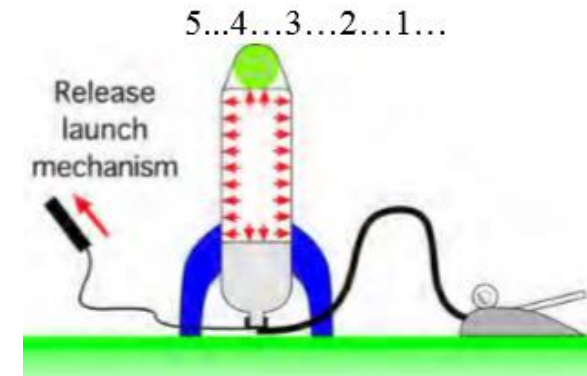
1. Llenado de agua y bombeo de aire hasta la presión deseada.



2. Estabilización del combustible y comprobación errores (1 minuto).



3. Aviso a organización y cuenta atrás para el lanzamiento.

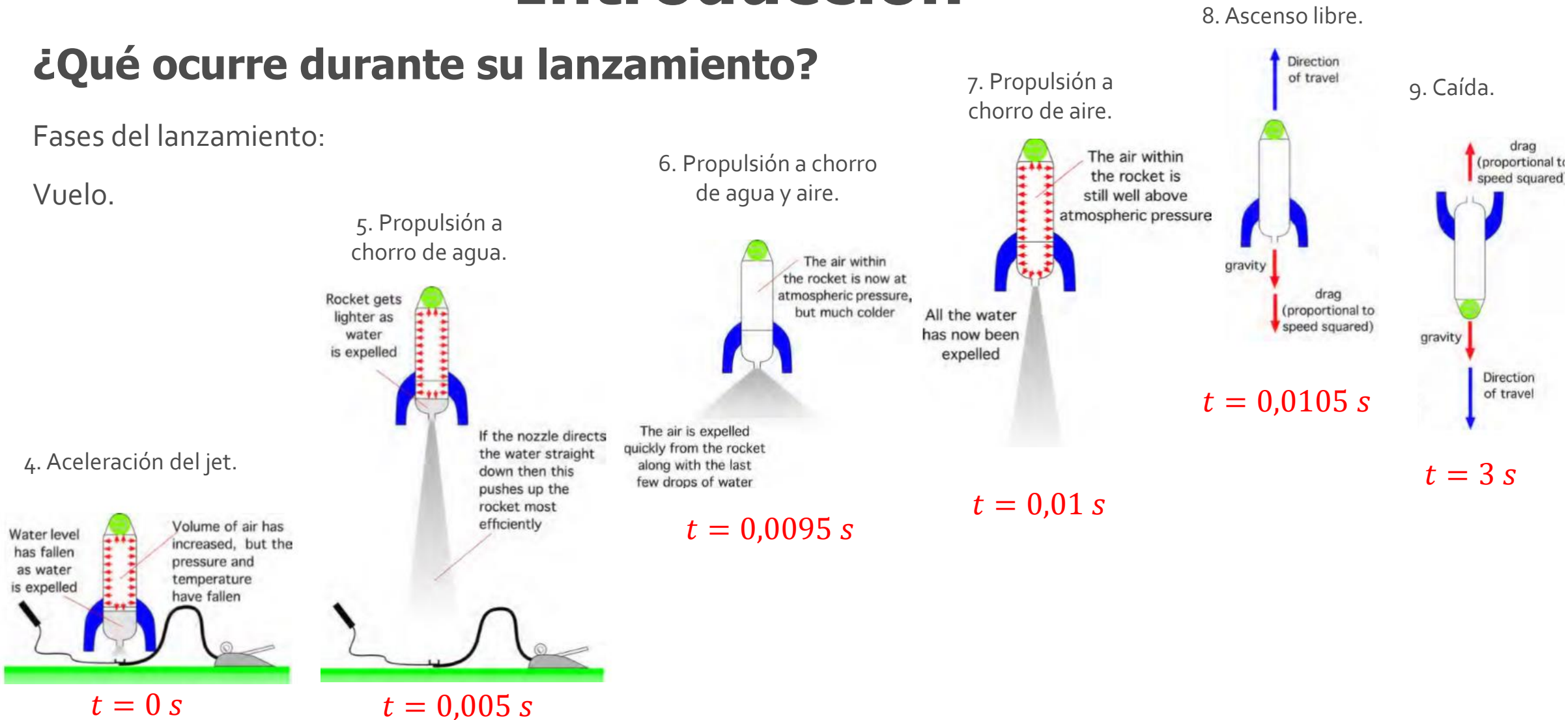


# Introducción

## ¿Qué ocurre durante su lanzamiento?

Fases del lanzamiento:

Vuelo.





# Índice

## 1. Introducción

## 2. Estudio del movimiento

- Visión general
- Formalismos para la dinámica
- Fuerzas sobre el cohete
- Descripción de la propulsión
- Descripción de la expansión del gas
- Estabilidad del cohete
- Condiciones atmosféricas

## 3. Simulación



Cohetes de agua como recurso educativo: desde la motivación científicotecnológica hasta la participación en un concurso

# Estudio del movimiento

## Visión general

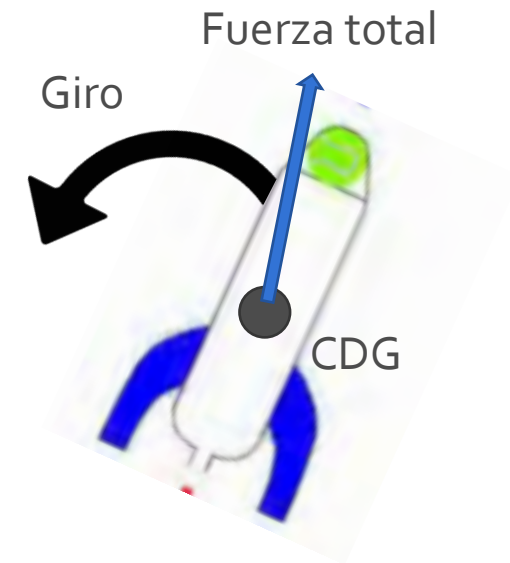
Hay que entender dos fenómenos:

### a) Desplazamiento.

**Balance de fuerzas:** propulsión (jet) frente a peso y fuerza aerodinámica.

### b) Estabilidad.

**Balance de momentos:** Giro causado por la fuerza aerodinámica.



# Estudio del movimiento

## Visión general

La figura representa un cohete en los instantes iniciales de su ascenso. Primero, observemos que hay definidos dos sistemas de coordenadas:

a) Sistema XY fijo, con origen en el mecanismo de liberación.

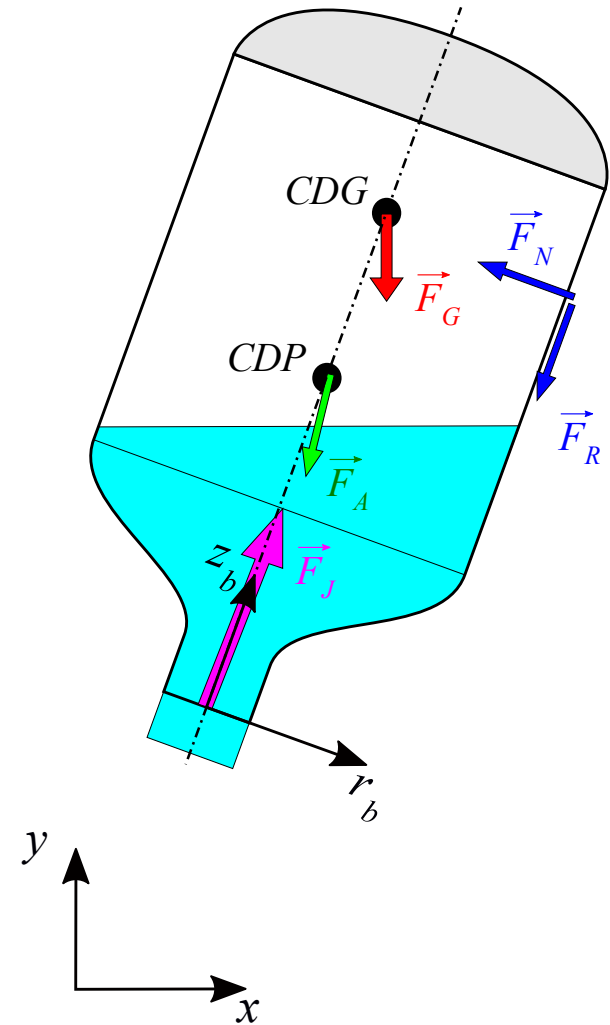
y - dirección vertical (positiva hacia arriba).

x - dirección horizontal (positiva hacia donde se mueva el cohete).

b) Sistema ZR móvil, sobre el centro del eyector.

$z_b$  - coordenada axial (positiva hacia el interior del cohete).

$r_b$  - coordenada radial.

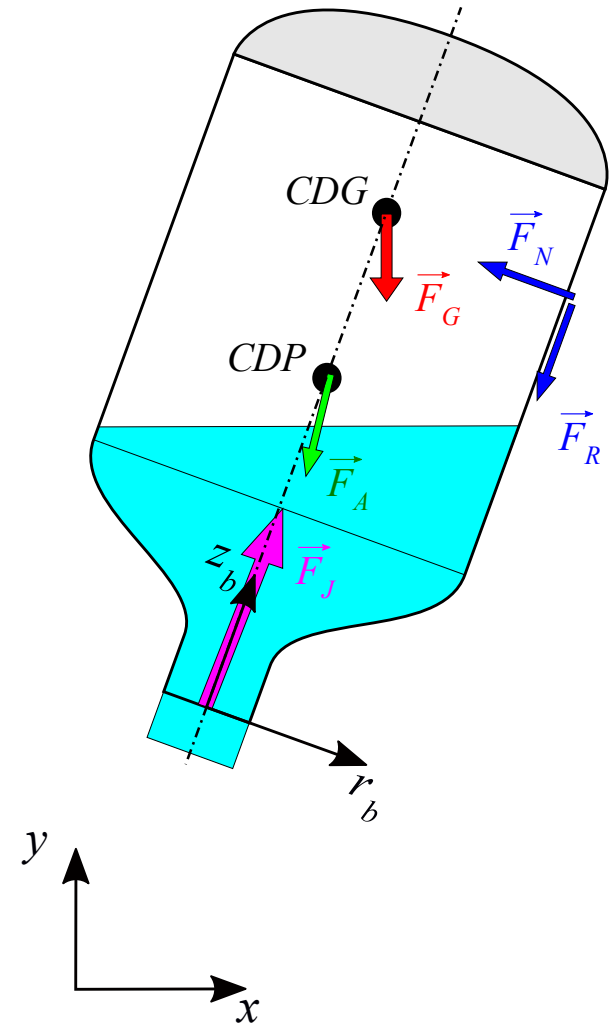


# Estudio del movimiento

## Visión general

Después, nos fijamos en las **fuerzas** que pueden llegar a actuar sobre el cohete:

- Fuerza de la gravedad (peso),  $\vec{F}_G$ .**  
Aplicada sobre centro de gravedad (CDG).
- Fuerza aerodinámica (drag y lift),  $\vec{F}_A$ .**  
Aplicada sobre centro de presiones (CDP).
- Fuerzas de fricción (rozamiento),  $\vec{F}_R$ , y normal,  $\vec{F}_N$ .**  
Aplicadas donde contacte el cohete con los estabilizadores de la lanzadera.
- Fuerza de propulsión (jet),  $\vec{F}_J$ .**  
Aplicada en la salida del eyector.

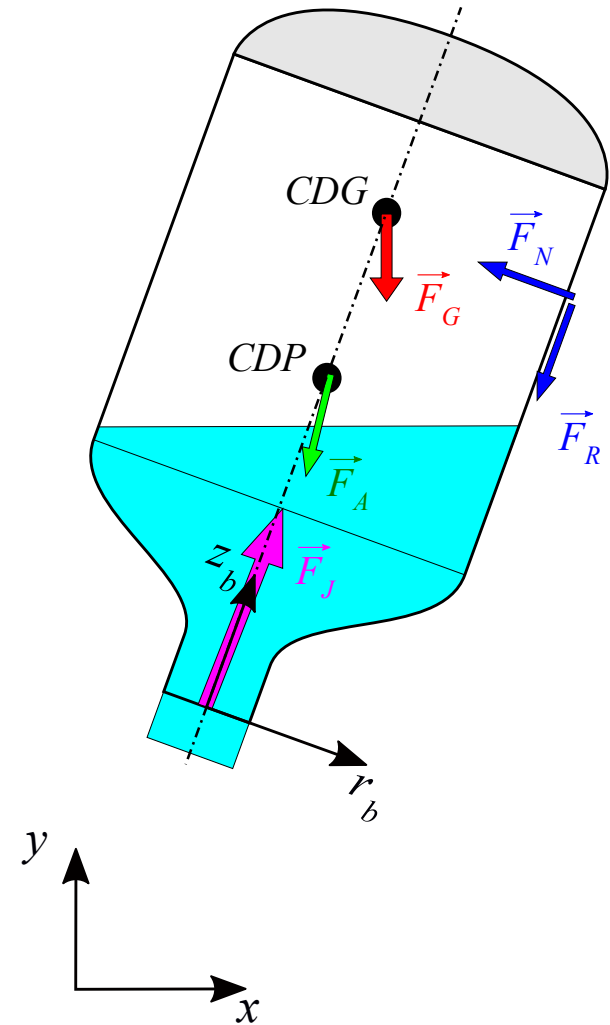


# Estudio del movimiento

## Visión general

Después, nos fijamos en las **fuerzas** que pueden llegar a actuar sobre el cohete:

- Fuerza de la gravedad (peso),  $\vec{F}_G$ .**  
Aplicada sobre centro de gravedad (CDG).
- Fuerza aerodinámica (drag y lift),  $\vec{F}_A$ .**  
Aplicada sobre centro de presiones (CDP).
- Fuerzas de fricción (rozamiento),  $\vec{F}_R$ , y normal,  $\vec{F}_N$ .**  
Aplicadas donde contacte el cohete con los estabilizadores de la lanzadera.
- Fuerza de propulsión (jet),  $\vec{F}_J$ .**  
Aplicada en la salida del eyector.



# Estudio del movimiento

## Visión general

Los parámetros básicos que van a determinar cómo se mueve nuestro cohete son:

a) **Agua.**

$m_{a,o}$  - masa inicial de agua (kg)

b) **Gas.**

$P_o$  - presión inicial de gas (Pa)

c) **Cohete**

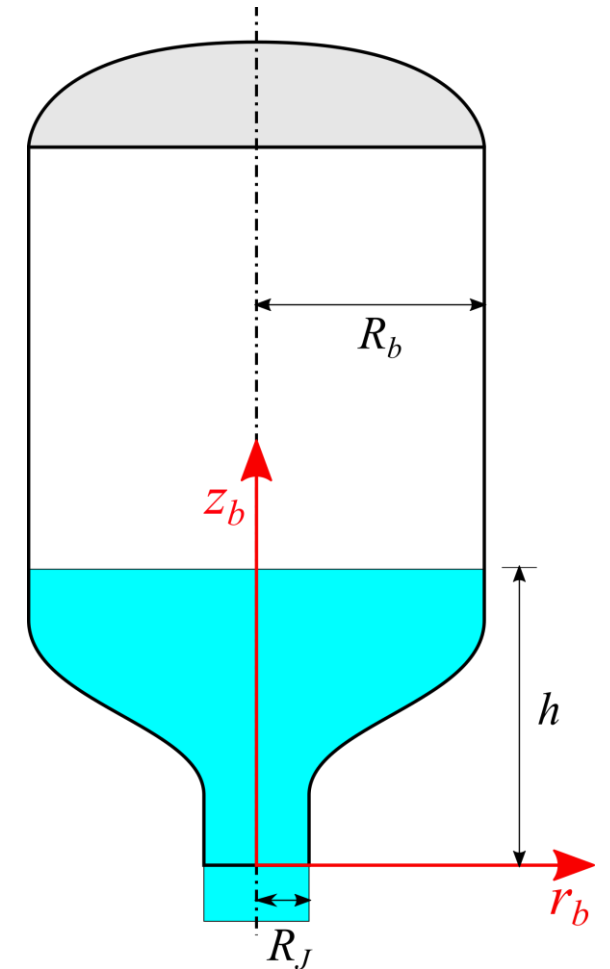
$V_b$  - volumen del depósito ( $m^3$ )

$m_b$  - masa del cohete sin combustible (kg)

$A_b (R_b)$  - área (radio) de la sección transversal del cohete ( $m^2$ )

$A_J (R_J)$  - área (radio) de la salida del eyector ( $m^2$ )

$C_D$  - Coeficiente aerodinámico (-)



# Estudio del movimiento

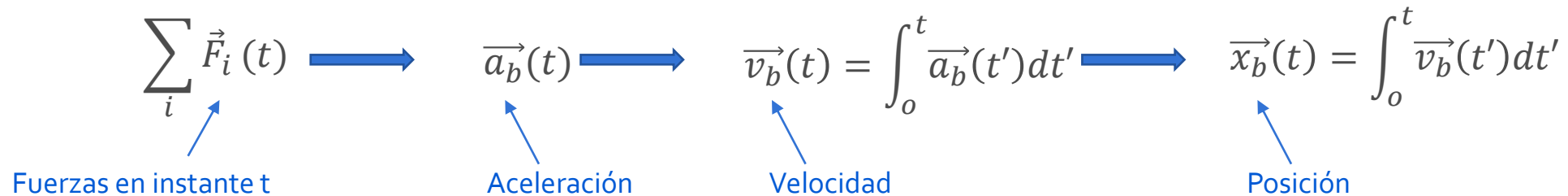
## Formalismos matemáticos

Con formalismo dinámico queremos decir qué ecuaciones vamos a utilizar para describir el movimiento del cohete cuando las distintas fuerzas actúan sobre él. A continuación, vamos a ver tres formalismos que permiten calcular la aceleración del cohete a partir de las fuerzas que intervienen:

- Segunda ley de Newton.
- Ecuación de movimiento con masa variable.
- Ecuación de transporte de Reynolds.



Una vez conocida la aceleración del cohete, se obtiene cómo varían su velocidad y posición integrando:



# Estudio del movimiento

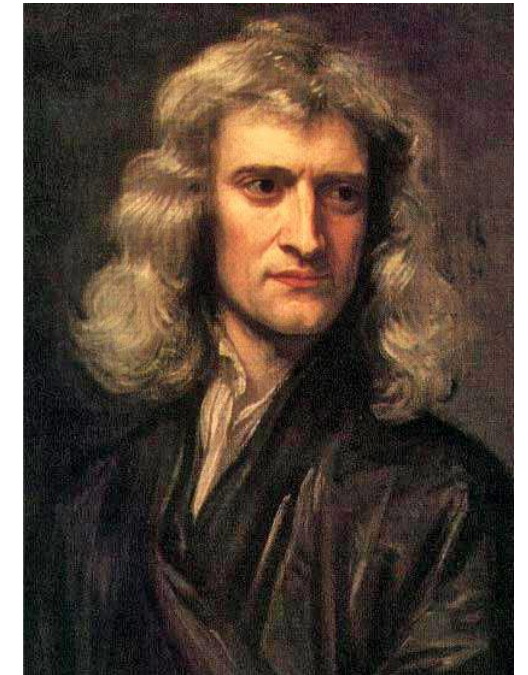
## Formalismos matemáticos

La **segunda ley de Newton** establece cómo se acelera un cuerpo de masa constante ( $m$ ) cuando varias fuerzas actúan sobre él:

$$\sum_i \vec{F}_i(t) = m \vec{a}_b(t)$$

Los problemas de aplicar esta ley a un cohete son evidentes: el cohete va perdiendo masa conforme avanza el tiempo. Aún así, se utiliza a menudo para el cálculo de movimiento de cohetes suponiendo:

- a) Que la masa que hay que incluir en esta ecuación es la suma de la masa del cohete vacío, el gas comprimido y el agua que queda en el interior del cohete en cada momento.
- b) Que las fuerzas que pueden actuar son peso, rozamiento, normal, aerodinámica y propulsión.



**Isaac Newton**

Sir Godfrey Kneller (1689), Institute for Mathematical Sciences,  
University of Cambridge  
[Wikimedia Commons](#)



# Estudio del movimiento

## Formalismos matemáticos

La **ecuación del movimiento de masa variable** establece cómo se acelera un cuerpo de masa variable ( $m(t)$ ) cuando varias fuerzas actúan sobre él:

$$\sum_i \vec{F}_i(t) + \vec{v}_j(t) \frac{dm(t)}{dt} = m(t) \vec{a}_b(t)$$

En esta ecuación aparece directamente el efecto de la pérdida de masa del jet a través de la velocidad del agua en la salida del eyector  $\vec{v}_j(t)$ . Hay que tener cuidado con esta velocidad, porque ha de medirse relativa a la salida del eyector, no desde el suelo.

Como el efecto de la propulsión del chorro ya está incluido en la ecuación (término en azul), las fuerzas a tener en cuenta serán peso, rozamiento, normal y aerodinámica.

# Estudio del movimiento

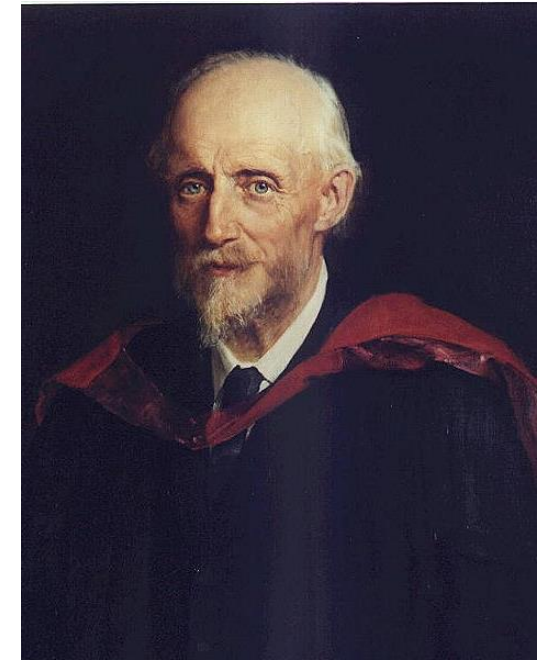
## Formalismos matemáticos

La ecuación de transporte de momento de Reynolds fueron desarrolladas para estudiar el comportamiento de los fluidos en depósitos con entradas y salidas:

$$\sum_i \vec{F}_i(t) = \frac{d}{dt} \left[ \int_{VC} \rho(t) \vec{v}(t) dV \right] + \int_{SC} \rho(t) \vec{v}(t) [\vec{v}_j(t) \cdot d\vec{S}]$$

Esta ecuación es significativamente más compleja que las anteriores porque no está desarrollada para un objeto puntual. Como la ecuación se refiere a los fluidos que ocupan el interior del depósito, tanto las densidades  $\rho(t)$  como las velocidades  $\vec{v}(t)$  que aparecen se refieren los fluidos que haya en el depósito (VC).

En este caso, los efectos del chorro ya están incluidos (en la integral de superficie, SC). Respecto a las fuerzas a considerar, además del peso, el rozamiento, la normal y la fuerza aerodinámica, hay que considerar la fuerza que hace el depósito sobre el propio fluido.



**Osborne Reynolds**

John Collier, 1904, University of Manchester  
[Public Domain](#)

# Estudio del movimiento

## Fuerzas sobre el cohete:

### Fuerza de la gravedad (PESO).

La gravedad actúa entre todos los cuerpos que tienen masa, atrayéndolos entre sí.

Cuando la fuerza de la gravedad se produce entre la Tierra y un cuerpo dentro de ella, se denomina fuerza peso, o simplemente peso. Su valor se puede calcular como:

$$\vec{F}_p = m \vec{g}$$

En esta expresión,  $m$  se refiere a la masa del cuerpo que experimenta la fuerza, y  $g$  es la aceleración de la gravedad.

A efectos prácticos, la aceleración de la gravedad se considera una constante:  $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$ .

# Estudio del movimiento

## Fuerzas sobre el cohete:

Fuerza de la gravedad (PESO).

La expresión de la fuerza peso proviene de la ley de la Gravitación Universal (Newton, 1687):

$$\vec{F}_G = G \frac{m M}{d^2} \hat{u}_{m,M}$$

En esta expresión,  $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$  es la constante de gravitación universal,  $m$  y  $M$  se refieren a las masas de dos cuerpos separados entre sí por una distancia  $d$ , y  $\hat{u}_{m,M}$  un vector unitario en la dirección que une  $m$  y  $M$ . Si esta es la única fuerza que actúa sobre un cuerpo, entonces  $\vec{F}_G = m\vec{a}$ . Para un cuerpo a una altura  $y$  sobre el suelo:

$$\vec{a} = -G \frac{M_T}{(R_T + y)^2} \hat{y} = -g\hat{y}$$

$$M_T = 5,97237 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$R_T = 6375 \text{ km}$$

$$9,8076 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ si } y = 0 \text{ m}$$

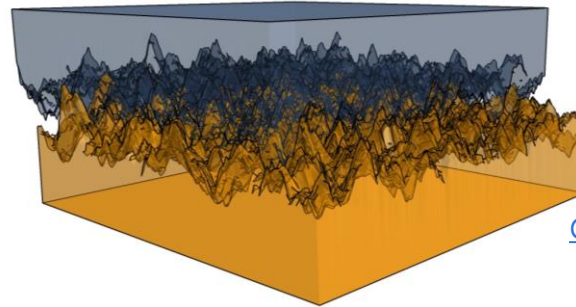
$$9,8073 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ si } y = 100 \text{ m}$$

# Estudio del movimiento

## Fuerzas sobre el cohete:

### Fuerzas de fricción (rozamiento).

Las fuerzas de fricción aparecen cuando un cuerpo desliza sobre otro. La fuerza tiene lugar justo en la superficie de contacto entre ambos cuerpos, y tiene su origen a nivel microscópico, donde las pequeñas irregularidades (rugosidades) de ambos cuerpos colisionan entre sí:



[Creative Commons](#)

Para cuerpos apoyados sobre una plataforma plana estática, típicamente se calcula a partir de la fuerza normal que ejerce la plataforma,  $F_N$ , y el denominado coeficiente de rozamiento,  $\mu$  :

$$\vec{F}_R = -\mu F_N \hat{u}_v$$

# Estudio del movimiento

## Fuerzas sobre el cohete:

### Fuerzas de fricción (rozamiento).

En general, se suele modelizar como la suma de dos términos, uno constante y otro proporcional a la velocidad del cuerpo:

$$\vec{F}_R = -(\mu F_N - b v) \hat{u}_v$$

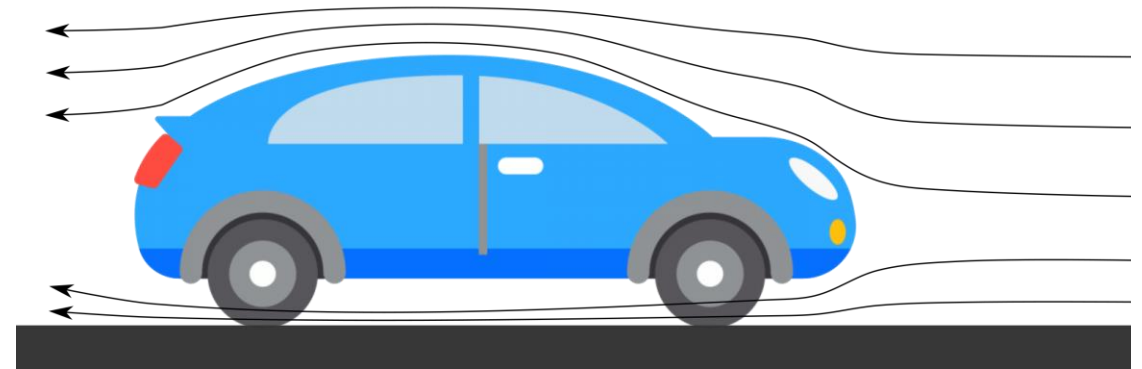
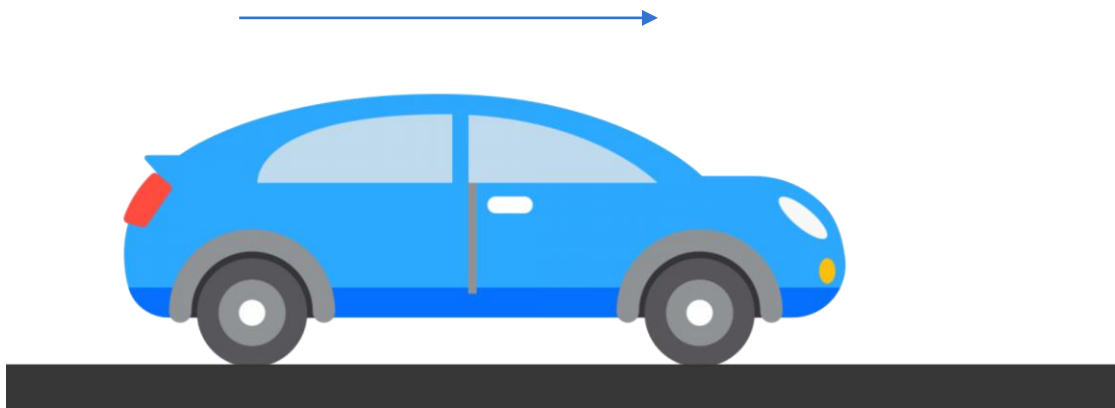
El primer término es el mismo que aparece en la expresión para el rozamiento de la diapositiva anterior. Este término es típicamente mucho mayor que el segundo, que sólo se aprecia para velocidades muy altas o para configuraciones en vertical, donde no hay fuerza normal.

# Estudio del movimiento

## Fuerzas sobre el cohete:

### Fuerza aerodinámica.

Es la fuerza que ejerce el aire sobre los cuerpos que se desplazan respecto de él. Es decir, puede ser debida a que un cuerpo se mueve respecto al aire en reposo, como el coche de la izquierda, o porque el aire en movimiento (viento) impacta sobre el coche en reposo.



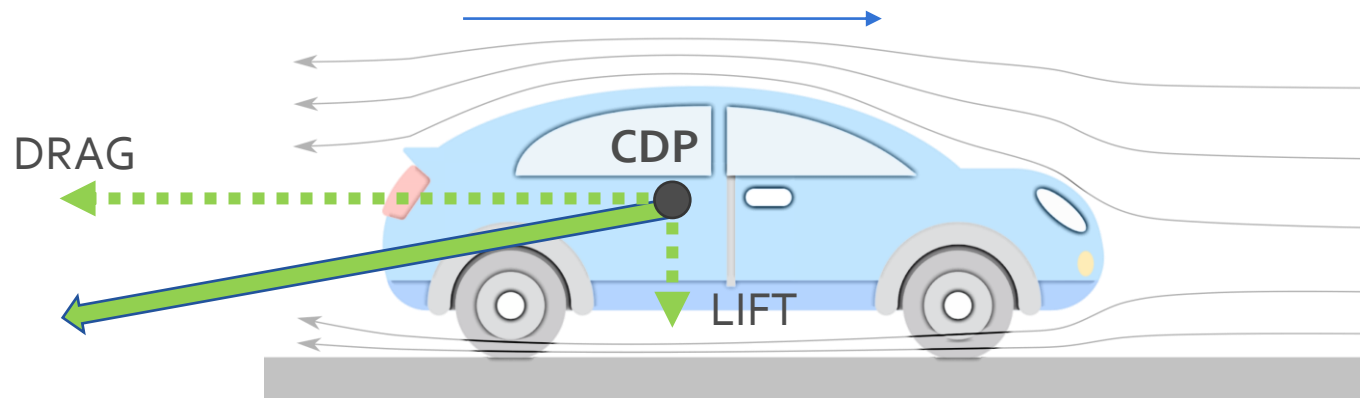
Obviamente, ¡también puede ocurrir que el coche se mueva mientras sopla el viento!

# Estudio del movimiento

## Fuerzas sobre el cohete:

### Fuerza aerodinámica.

Como toda fuerza, se caracteriza por su punto de aplicación (centro de presiones, CDP), módulo y dirección. Es habitual descomponerla en componentes paralela (arrastre o *drag*) y perpendicular (sustentación o *lift*) a la dirección de movimiento. La más influyente en la dinámica de cohetes es el *drag*,  $\vec{F}_D$ .





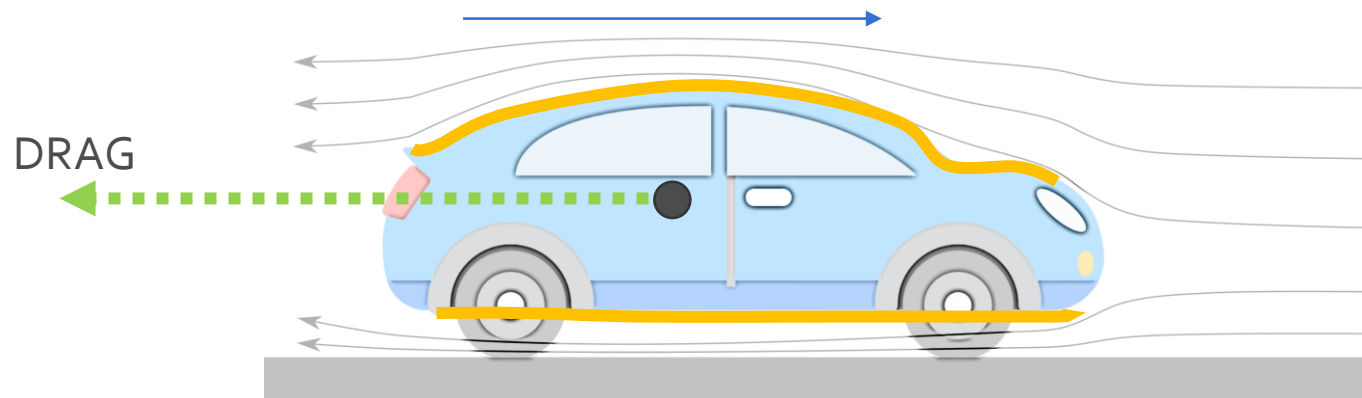
# Estudio del movimiento

## Fuerzas sobre el cohete:

Fuerza aerodinámica: *drag*.

El drag es causado por dos fenómenos distintos.

Uno de ellos es la **fricción** entre el aire y la superficie del coche (**skin drag, friction drag**).



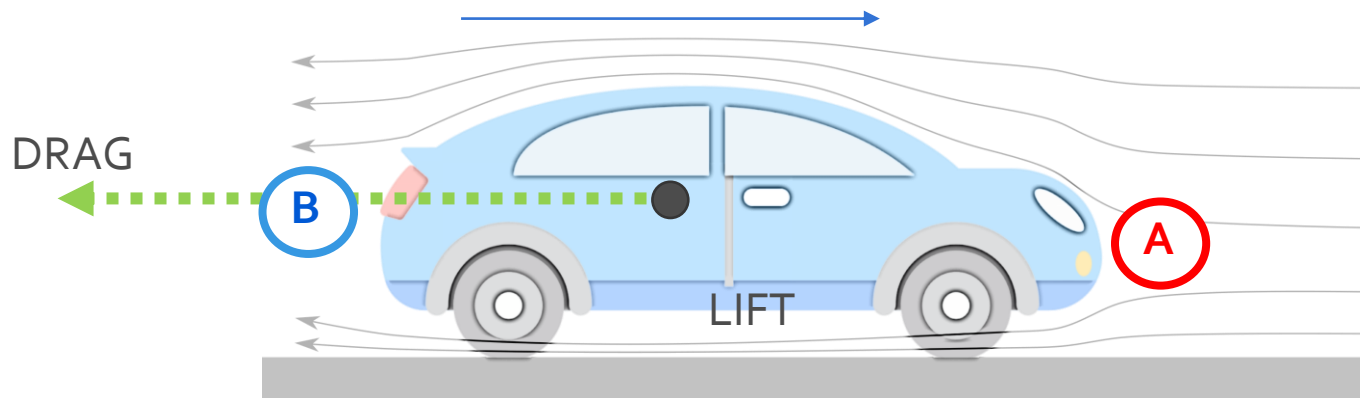
# Estudio del movimiento

## Fuerzas sobre el cohete:

Fuerza aerodinámica: *drag*.

El *drag* es causado por dos fenómenos distintos.

El otro es por la formación de dos frentes de presiones: uno de **altas presiones** en la parte delantera del cuerpo y otro de **bajas presiones** en la parte trasera.



# Estudio del movimiento

## Fuerzas sobre el cohete:

Fuerza aerodinámica: *drag*.

El módulo del *drag* se calcula como:

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho S v_{relativa}^2$$

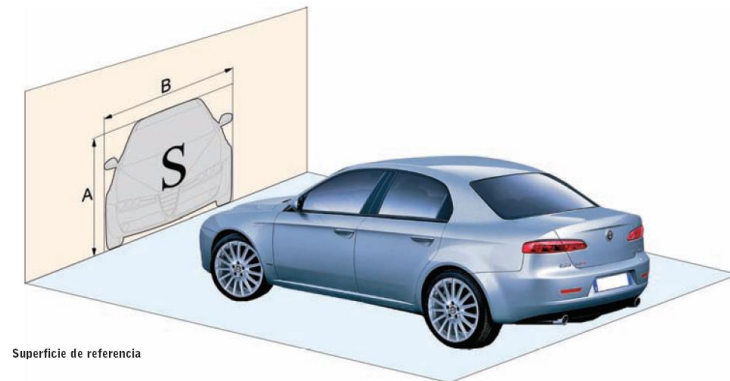
En esta expresión:

$C_D$ : coeficiente aerodinámico o de arrastre [-]

$\rho$ : densidad del aire

$S$ : superficie frontal de referencia [m<sup>2</sup>] (ver figura)

$v_{relativa}$ : velocidad relativa entre el cuerpo y el aire [m/s]



# Estudio del movimiento

## Fuerzas sobre el cohete:

Fuerza aerodinámica: *drag*.

La medida de coeficientes aerodinámicos se hace en instalaciones llamadas túneles de viento. En ellos, el viento se acciona gracias a un ventilador de potencia regulable. Midiendo la velocidad del viento, la sección del cohete expuesta al flujo, y la fuerza que ejerce el viento (con una balanza), podemos despejar el coeficiente aerodinámico:

$$C_d = \frac{2 F_D}{\rho S v_{relativa}^2}$$

VID



Túnel de viento en el Laboratorio de Hidráulica de la Universitat Jaume I

# Estudio del movimiento

## Fuerzas sobre el cohete:

Fuerza aerodinámica: *drag*.

Coeficientes de arrastre típicos:

- 2CV: 0,51
- Hummer H2: 0,57
- Renault Megane: 0,32
- Prototipo de Mercedes "bionic car": 0,19
- Fórmula 1: 1,40
- Boeing 787: 0,03
- Tesla Cybertruck: 0,4
- Model rocket: 0,75

Shape	Drag Coefficient
Sphere	0.47
Halfsphere	0.42
Cone	0.50
Cube	1.05
Angled Cube	0.80
Long Cylinder	0.82
Short Cylinder	1.15
Streamlined Body	0.04
Streamlined Halfbody	0.09

Measured Drag Coefficients

[Public Domain](#)

# Estudio del movimiento

## Fuerza de propulsión

La fuerza de propulsión merece un capítulo aparte al ser la fuerza que causa el movimiento del cohete. Su expresión es:

$$\vec{F}_J = \frac{dm}{dt} v_J \hat{u}_z$$

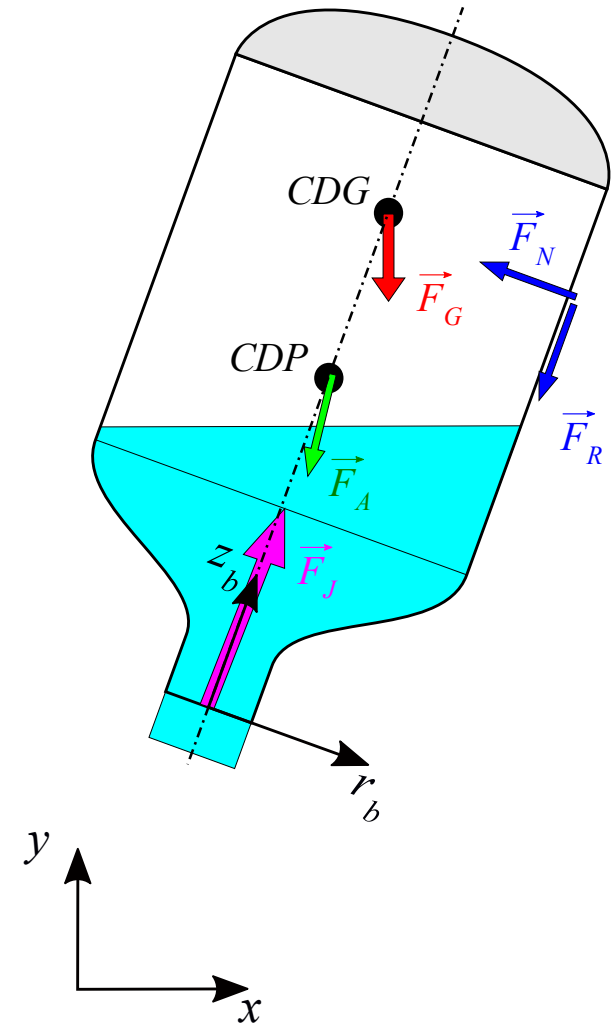
En esta expresión,  $\frac{dm}{dt}$  es el ritmo al que se pierde masa de agua (cuántos kilos de agua se pierden por segundo),  $v_J$  es la velocidad a la que sale el chorro del eyector (referida a la salida del eyector), y  $\hat{u}_z$  es un vector unitario orientado según el eje z del proyectil.

El primer factor que aparece, la pérdida de masa, se puede expresar como:

$$\frac{dm}{dt} = -\rho_a v_J A_J$$

Densidad del fluido que sale en el chorro

Área de salida del eyector



# Estudio del movimiento

## Fuerza de propulsión

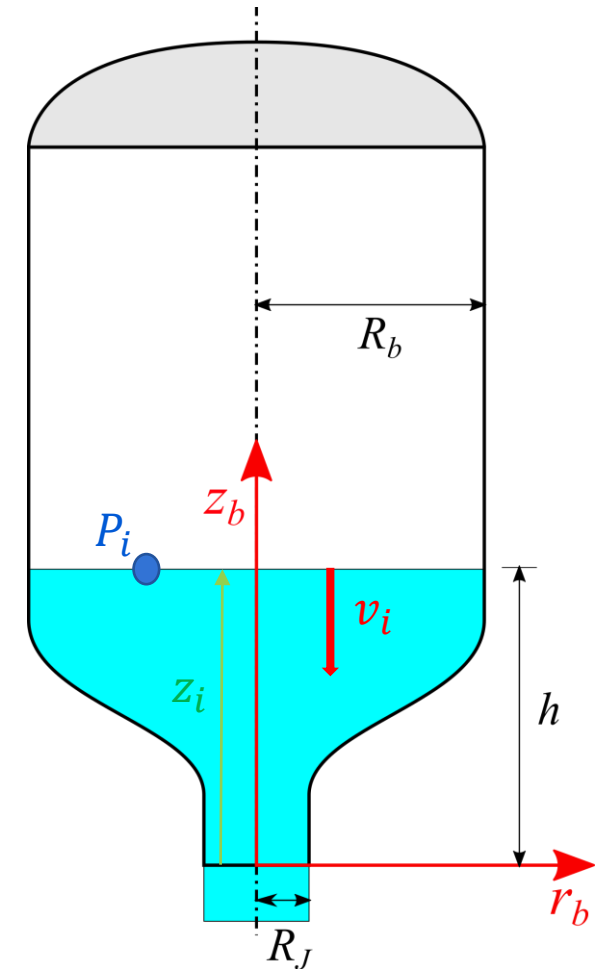
### Velocidad del jet:

La velocidad del jet puede calcularse mediante un balance energético.

En su **versión más sencilla**, este balance se puede realizar aplicando la ecuación de Bernoulli entre la interfaz aire-agua del interior del depósito y la salida del chorro a través del eyector:

$$\frac{P_i}{\rho_a g} + z_i + \frac{v_i^2}{2g} = \frac{P_j}{\rho_a g} + z_j + \frac{v_j^2}{2g} \quad (\text{Ecuación de Bernoulli})$$

- Energía cinética
- Energía potencial
- Energía mecánica de presión



# Estudio del movimiento

## Fuerza de propulsión

### Velocidad del jet:

La velocidad de salida del y la velocidad de la interfaz están relacionadas entre sí. Como el agua no puede comprimirse, el volumen de agua desalojado en cada momento ha de ser igual a la disminución de volumen de líquido en el depósito.

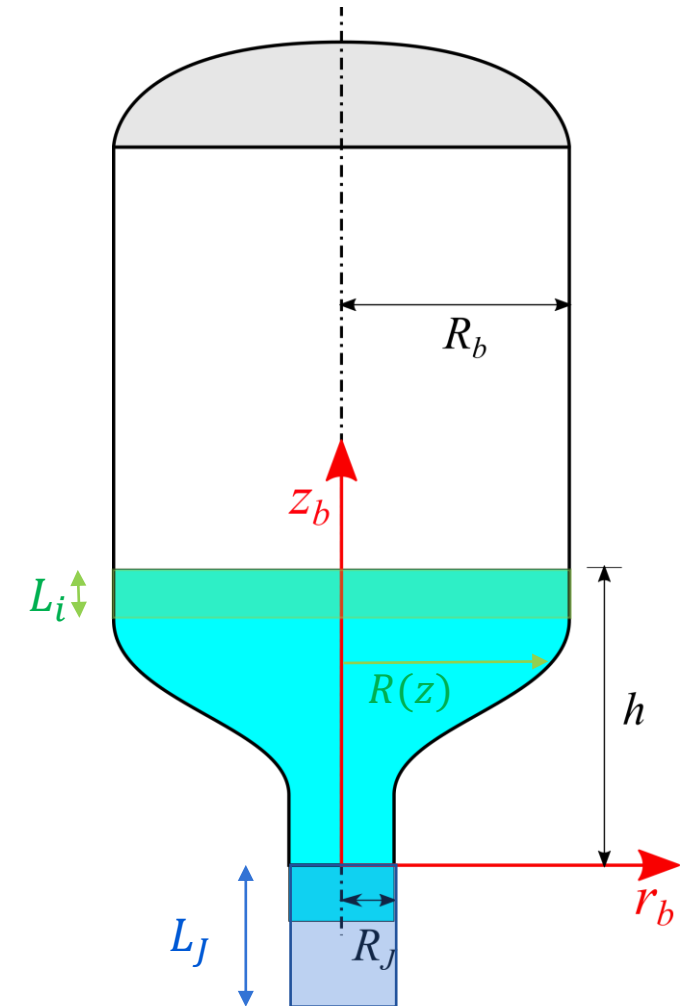
La relación entre ambos volúmenes es:

$$\pi R(z)^2 L_i = \pi R_J^2 L_J$$

$$v = \frac{L}{\Delta t}$$

$$\pi R(z)^2 v_i = \pi R_J^2 v_J$$

(Ecuación de continuidad)





# Estudio del movimiento

## Fuerza de propulsión

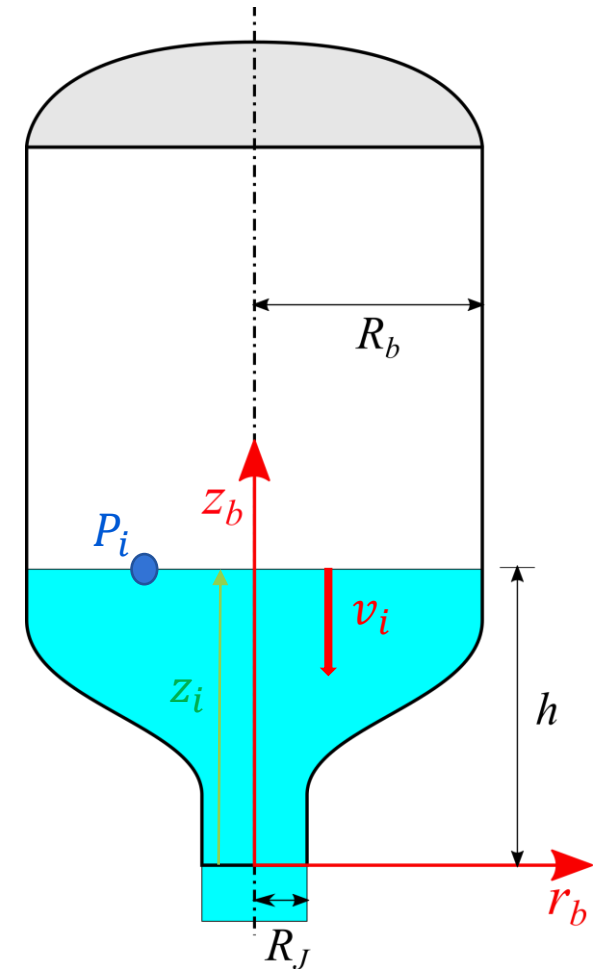
### Velocidad del jet:

Uniando las ecuaciones de Bernoulli y de continuidad podemos despejar la velocidad del chorro como:

$$v_J = \sqrt{\frac{2 [P_i + \rho_a g(z_i - z_J)]}{\rho_a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_J^2}{R(z)^2}}}$$

En esta expresión,  $A_J = \pi R_J^2$  es el área de salida del chorro. Como el radio de la abertura del eyector es típicamente mucho menor que el radio del depósito, y la diferencia de cotas  $z_i - z_J$  es también muy pequeña, la expresión anterior puede simplificarse:

$$v_J = \sqrt{\frac{2P_i}{\rho_a}}$$



# Estudio del movimiento

## Fuerza de propulsión

### Velocidad del jet:

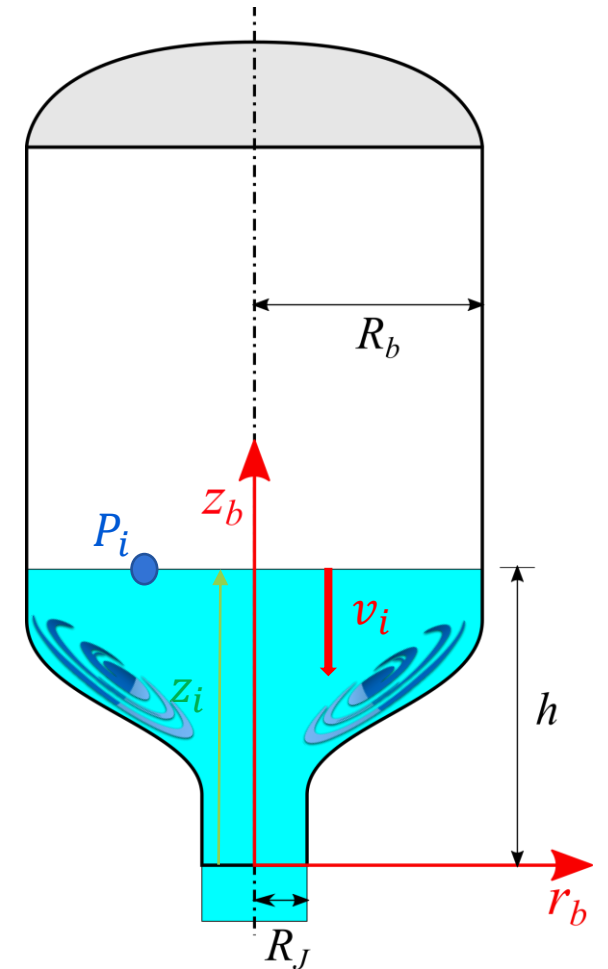
La velocidad del jet puede calcularse mediante un balance energético.

En una **versión más compleja**, este balance ha de incluir posibles pérdidas de energía a la salida del eyector:

$$\frac{P_i}{\rho_a g} + z_i + \frac{v_i^2}{2g} = \frac{P_J}{\rho_a g} + z_J + \frac{v_J^2}{2g} + h_{pérdidas} \quad (\text{Ecuación de Bernoulli con pérdidas})$$

Estas pérdidas se deben a la formación de remolinos en la salida del jet, que aparecen cuando la transición entre el depósito y la salida del eyector es demasiado abrupta. Suelen modelizarse como un término proporcional a la energía cinética:

$$h_{pérdidas} = K_J \frac{v_J^2}{2g}$$



# Estudio del movimiento

## Fuerza de propulsión

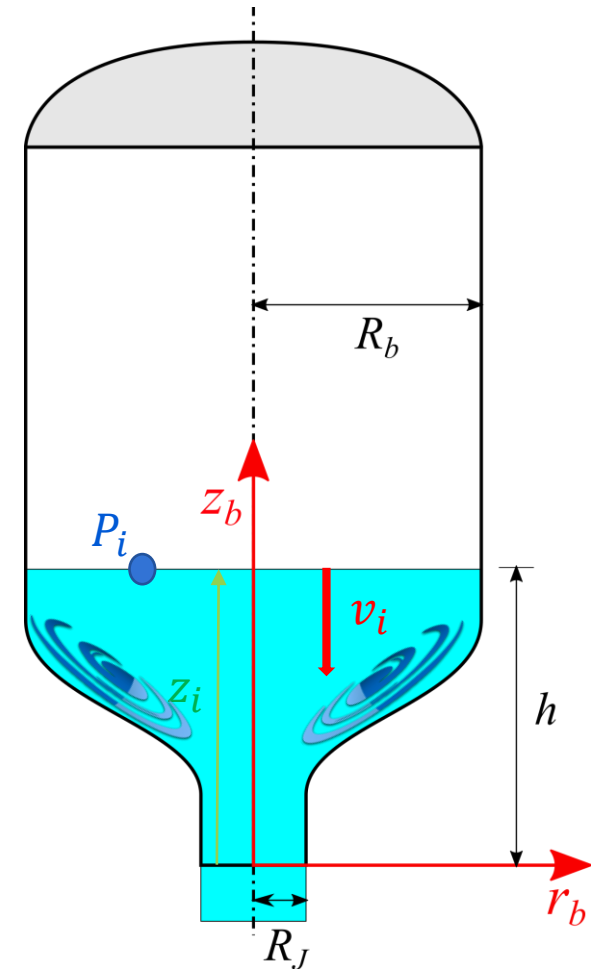
### Velocidad del jet:

La velocidad del jet puede calcularse mediante un balance energético.

El uso de la ecuación de Bernoulli para hacer este balance realmente es una aproximación, dado que la ecuación de Bernoulli sólo es válida para sistemas en estado estacionario. Una vez el jet se ha estabilizado, esta es una buena aproximación, pero en los instantes iniciales **es más riguroso** utilizar el [teorema de transporte de Reynolds](#) aplicado a la conservación de la energía:

$$\dot{Q}_{ext} + \dot{W}_{ext} = \frac{d}{dt} \left[ \int_{VC} \rho(t) e(t) dV \right] + \int_{SC} \rho(t) \left[ e(t) + \frac{P}{\rho} \right] [\vec{v}_j(t) \cdot d\vec{S}]$$
$$e(t) = \frac{v(t)^2}{g} + \rho z(t) + u(t)$$

En esta ecuación,  $u(t)$  representa la energía interna. Con esta aproximación, el chorro no tiene inicialmente una velocidad elevada, sino que está parado.



# Estudio del movimiento

## Expansión del aire

El aire es un fluido que se puede comprimir y expandir. La expansión de los gases es un fenómeno muy complejo, y sus características dependen de múltiples factores, como por ejemplo si la velocidad a la que se produce la expansión y las propiedades de la cámara que lo contiene (aislada térmicamente, buena conductora, etc).

En el caso de la expansión del gas que se produce al soltar la tapa del depósito, es tan rápida (dura décimas de segundo) que no da tiempo a que se intercambie calor con el exterior. Este tipo de expansiones se denomina *adiabática*, y para ellas **se cumple aproximadamente** la siguiente relación entre la presión del gas en todo instante,  $P_i(t)$ , el volumen que ocupa,  $V_i(t)$ :

$$P_i(t)V_i(t)^\gamma = P_i(0)V_i(0)^\gamma$$

El exponente  $\gamma$  se denomina constante adiabática del gas, y para efectos prácticos toma un valor constante e igual a 1,4.

# Estudio del movimiento

## Expansión del aire

En realidad, la constante adiabática no es tan constante, y depende de otros factores. El más influyente es la humedad relativa del aire, HR. Diversos investigadores han proporcionado la siguiente expresión para la constante adiabática en función de la humedad relativa:

$$\gamma = 1,15 + (1,4 - 1,15)e^{-36 \frac{P_v(T_i)}{P_i}}$$

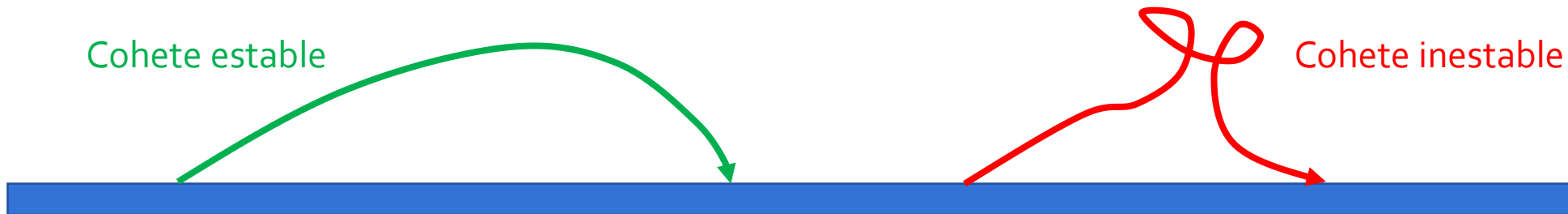
Si la expansión adiabática es muy rápida, no da tiempo a que el gas se estabilice llegando al equilibrio, por lo que es **más riguroso** calcular, para cada momento, cómo varían la presión y la temperatura:

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{P(0)V(0)^{\gamma(t)}}{V(t)^{\gamma}} \right]$$
$$\frac{dT_i(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ T(0) \left( \frac{P(t)}{P(0)} \right)^{\gamma(t)-1 / \gamma(t)} \right]$$

# Estudio del movimiento

## Estabilidad

Uno de los requisitos de cualquier cohete es que su trayectoria sea clara y predecible, describiendo un arco suave tanto en su ascenso como en su descenso. Cuando esto se cumple diremos que el cohete es estable. Cuando esto no ocurre, y la trayectoria es errática (y peligrosa), diremos que el cohete no es estable.



La estabilidad en cohetes se consigue gracias a un adecuado diseño. Para ello, se ha de tener en cuenta que las fuerzas que actúan sobre él lo pueden hacer girar.

# Estudio del movimiento

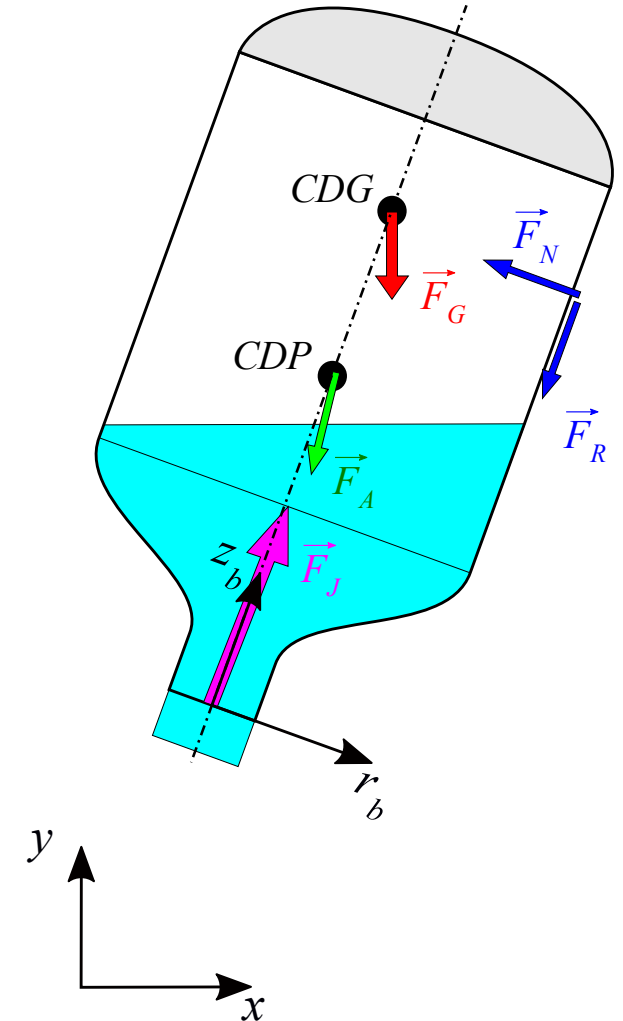
## Estabilidad

Normalmente pensamos que un cohete está orientado de tal forma que su eje está alineado con la dirección en la que avanza, es decir, con su vector velocidad. Es la configuración en principio más estable en la que podemos pensar.

Cuando esto ocurre, vemos que:

- La fuerza de la gravedad no causa momento, porque se aplica sobre el centro de gravedad.
- La fuerza del *jet* no causa momento, porque está alineada con el eje del cohete.
- La fuerza *drag* no causa momento, porque está alineada con el eje del cohete.

Así que en principio, en esta configuración el cohete seguirá manteniendo esta orientación.



# Estudio del movimiento

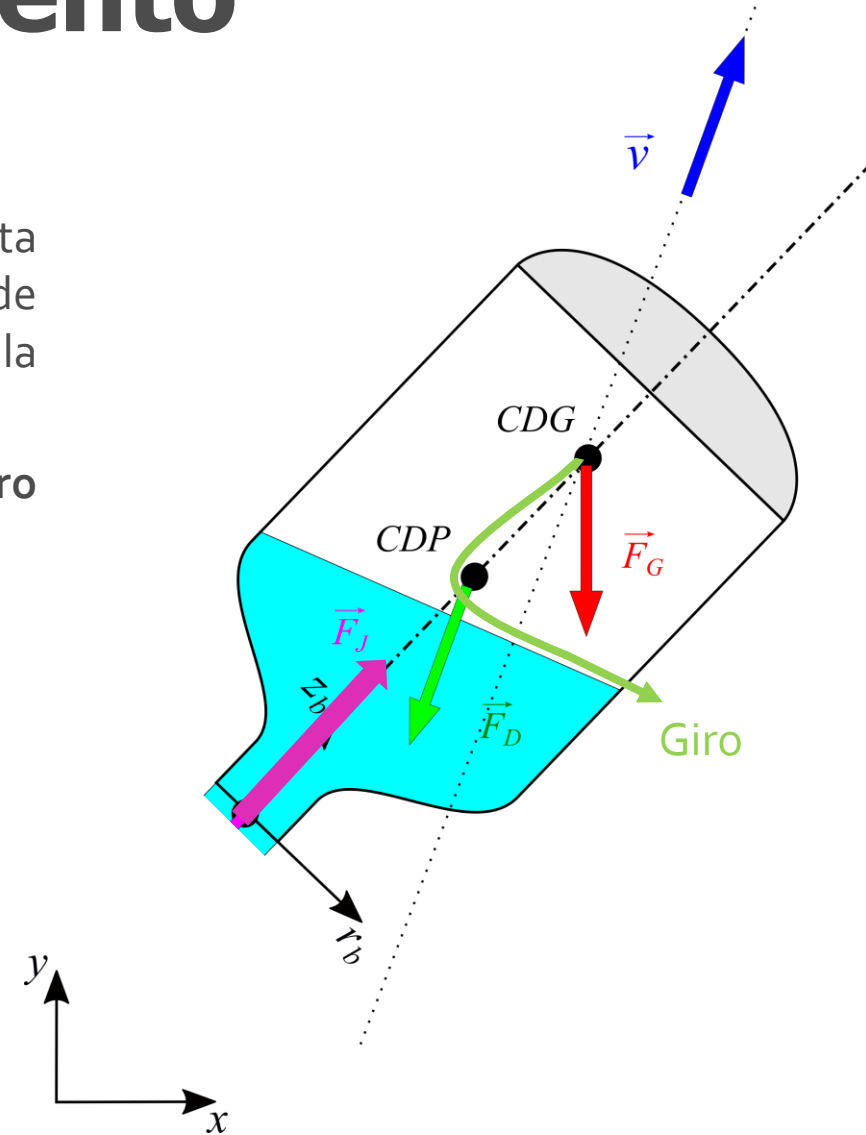
## Estabilidad

Pero eventualmente, sea por una ráfaga de viento lateral o por alguna falta de simetría (en el jet propulsor, en la lanzadera, etc), el cohete puede inclinarse ligeramente respecto de su dirección de avance (que la marca la velocidad).

En el diseño de la figura, con el **centro de presiones por debajo del centro de gravedad**, podemos ver que:

- La fuerza de la gravedad no causa momento, porque se aplica sobre el centro de gravedad.
- La fuerza del *jet* no causa momento, porque está alineada con el eje del cohete.
- La fuerza *drag* **SÍ** causa momento. En este caso, el momento actúa de forma que tiende a posicionar el cohete alineado con su dirección de avance.

En definitiva, este es un diseño **estable**.





# Estudio del movimiento

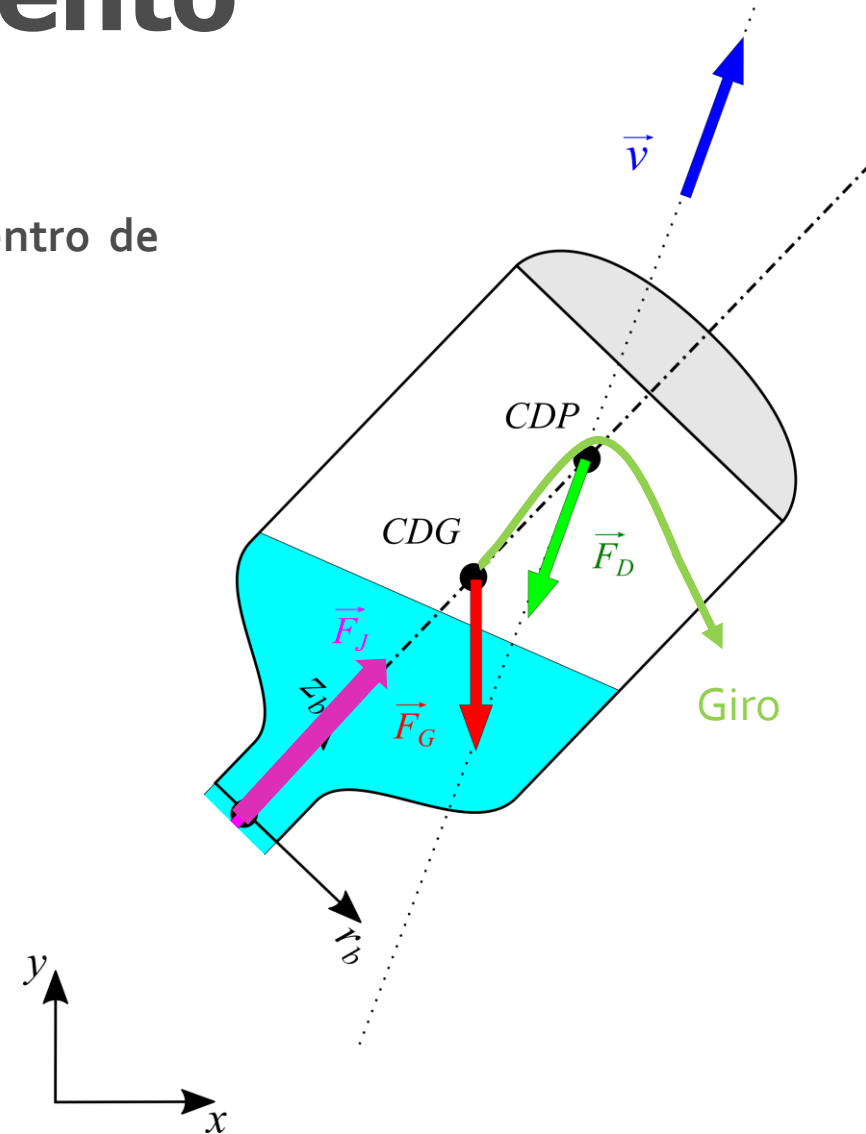
## Estabilidad

En este otro diseño, el centro de gravedad se ubica por debajo del centro de presiones. En este caso:

- La fuerza de la gravedad no causa momento, porque se aplica sobre el centro de gravedad.
- La fuerza del *jet* no causa momento, porque está alineada con el eje del cohete.
- La fuerza *drag* **SÍ** causa momento. Pero ahora el momento actúa de forma que tiende a inclinar el cohete más aún si cabe respecto de la dirección de avance, iniciando un proceso de rotación que da lugar a una trayectoria errática.

En definitiva, este es un **diseño inestable**.

Por ello, en los diseños se insertan aletas ligeras que buscan bajar el centro de presiones respecto del centro de gravedad.



# Estudio del movimiento

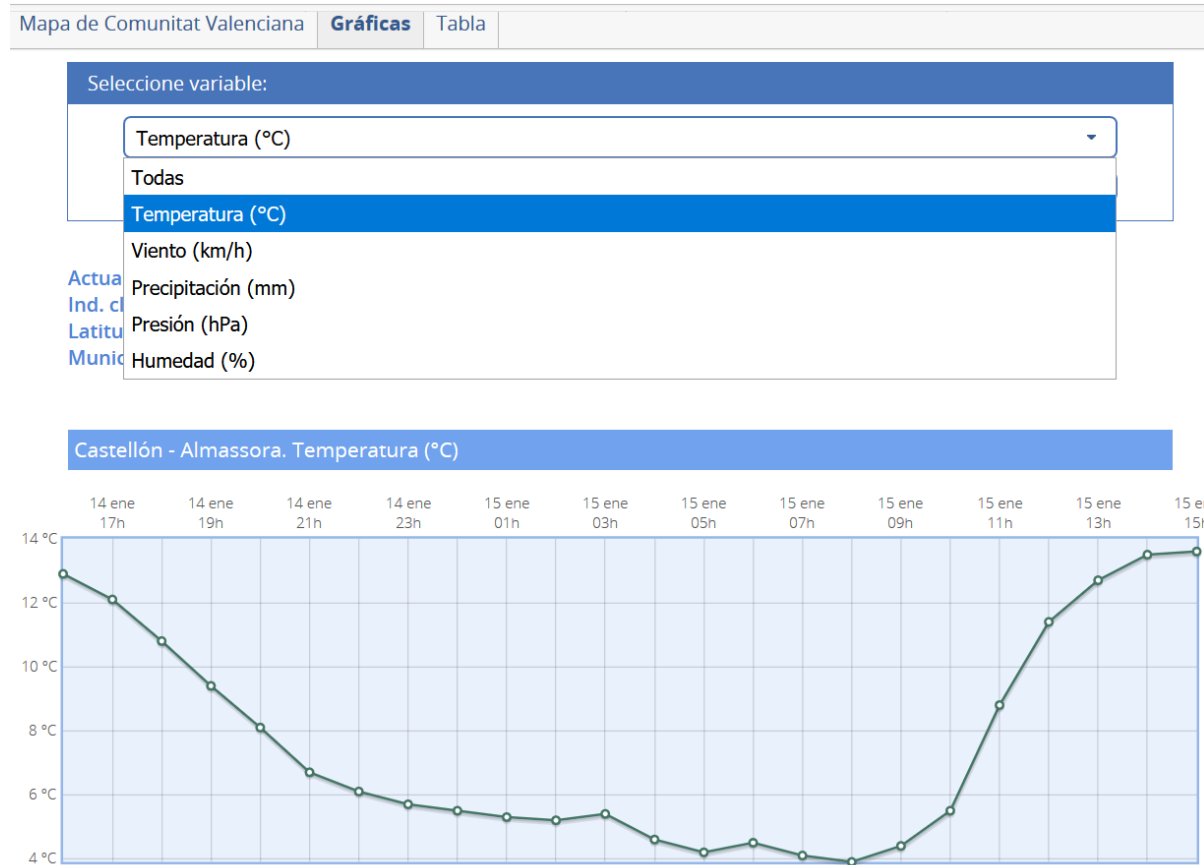
## Condiciones atmosféricas

Las condiciones de temperatura, presión y humedad relativa dependen de la climatología. Así, es habitual oír hablar de frentes de bajas y altas presiones cuando escuchamos las predicciones climatológicas en televisión.

Estas presiones pueden consultarse a través de los datos de estaciones meteorológicas próximas ([AEMET](#)).

También es posible determinarlas utilizando termómetros, barómetros y sensores de humedad relativa.

Hoy en día, muchos teléfonos móviles incluyen sensores y [apps](#) que permiten medirlas de forma aproximada.



Cohetes de agua como recurso educativo: desde la motivación científicotecnológica hasta la participación en un concurso

# Índice

1. Introducción
2. Estudio del movimiento
3. Simulación
  - ¿Qué son las simulaciones?
  - Método iterativo para resolver ecuaciones diferenciales
  - Simulador on-line
  - Estudios paramétricos

# Simulación

## ¿Qué es una simulación?

### Problema:

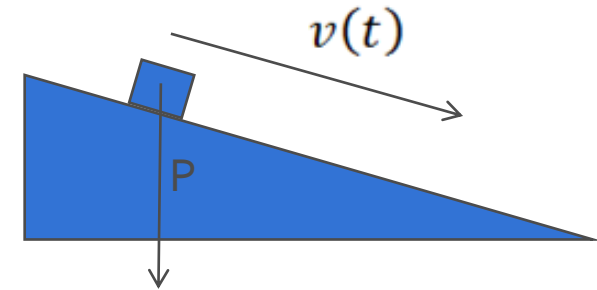
Calcule la rapidez con la que desciende el cuerpo de la figura.

### Física:

- Mecánica clásica VS mecánica relativista.
- Objeto puntual VS sólido rígido VS sólido deformable.
- Sin rozamiento VS con rozamiento.

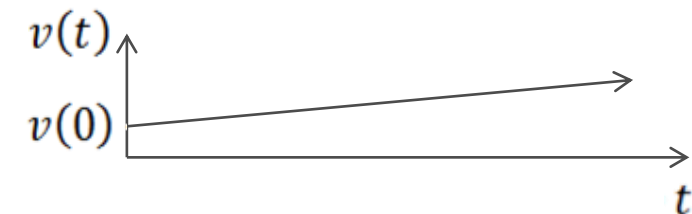
### Solución matemática:

### Análisis de la solución:



$$mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta = ma$$

$$v = v_0 + (g\sin\theta - \mu g\cos\theta)t$$



# Simulación

## ¿Qué es una simulación?

### Problema:

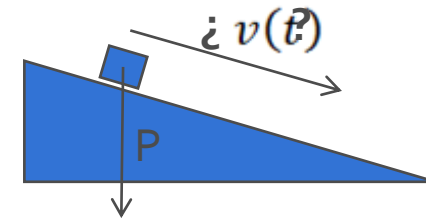
Calcule la rapidez con la que desciende el cuerpo de la figura.

### Física:

- Mecánica clásica VS mecánica relativista.
- Objeto puntual VS sólido rígido VS sólido deformable.
- Sin rozamiento VS con rozamiento.

### Solución matemática:

### Análisis de la solución:



Ecuaciones diferenciales complejas

Solución mediante procedimientos complejos

Sistema gráfico para analizar resultados

# Simulación

## ¿Qué es una simulación?

La **simulación** de sistemas consiste en la resolución de las ecuaciones matemáticas que describen su comportamiento mediante el uso de algoritmos de cálculo.

Si los modelos físicos son los adecuados y la simulación se ha hecho de manera correcta, entonces es esperable que el resultado de la simulación sea parecido al de un sistema real con las mismas características.

Esto se comprueba de dos formas:

- a) **Verificando** el código de la simulación, es decir, comprobando que el procedimiento matemático está bien planteado y se resuelve correctamente.
- b) **Validando** la simulación frente a datos experimentales.

# Simulación

## Resolución matemática

Anteriormente vimos que los formalismos matemáticos para resolver la dinámica de cohetes se basan en la siguiente aproximación:

$$\sum_i \vec{F}_i(t) \longrightarrow \vec{a}_b(t) \longrightarrow \vec{v}_b(t) = \int_0^t \vec{a}_b(t') dt' \longrightarrow \vec{x}_b(t) = \int_0^t \vec{v}_b(t') dt'$$

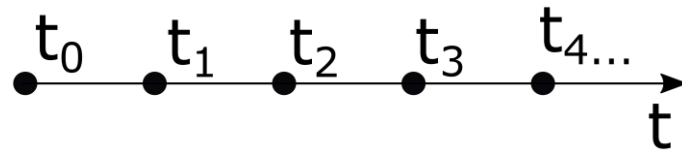
Fuerzas en instante t      Aceleración      Velocidad      Posición

A la hora de resolverla numéricamente se utiliza un esquema muy parecido.

# Simulación

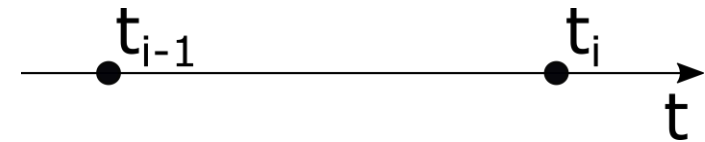
## Resolución matemática

El primer paso es realizar una discretización del tiempo. Así, aunque el tiempo fluya de forma continua y los valores de velocidades, posiciones, fuerzas, etc. varíen de forma continua, nosotros sólo vamos a calcularlos en un número determinado de instantes:



En las ecuaciones, las derivadas temporales pasan a ser diferencias de valores entre valores consecutivos. Por ejemplo, para calcular la derivada de la masa haremos:

$$\frac{dm}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} \approx \frac{m(t_i) - m(t_{i-1})}{\Delta t}$$



Entonces, si sabemos que  $\frac{dm}{dt} = X(t)$ , donde  $X(t)$  se obtiene a partir de las ecuaciones de la dinámica, podemos calcular:

$$m(t_i) = m(t_{i-1}) + \Delta t X(t_{i-1})$$

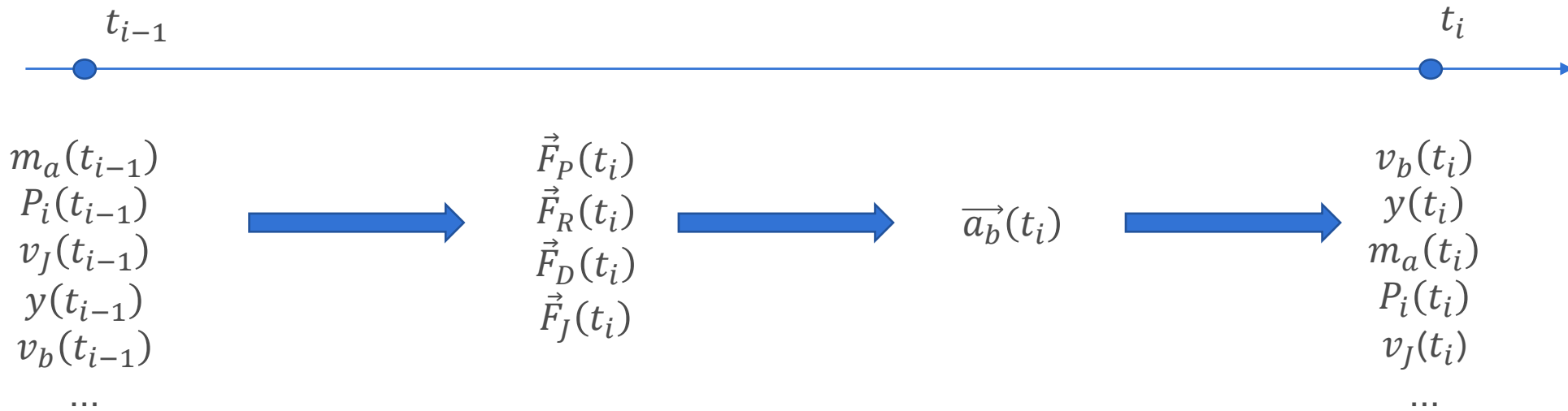


# Simulación

## Resolución matemática

Este tipo de manipulación algebraica se hace para todas las variables que aparecen en nuestras ecuaciones, calculando para cada nuevo instante de tiempo sus valores a partir de los valores que tomaban en el paso de tiempo anterior.

En resumen:



# Simulación

## Simulador on-line

Disponemos de un [simulador](#) de *water rockets* online.

Actualmente sólo está disponible la pestaña del modelo básico, y en breve aparecerán disponibles los modelos de las siguientes pestañas.

Se recomienda empezar por el modelo básico y entender bien el funcionamiento de los *water rockets* y la influencia que tienen los distintos parámetros sobre la altura máxima que alcanzan.

Una vez comprendido el modelado básico, se puede empezar a jugar con el modelo intermedio para una visión más completa.

Finalmente, se usará el modelo avanzado para obtener resultados más fiables.

## Simulador del I Concurso de Cohetes de Agua (Water Rockets)

MODELO BÁSICO

MODELO INTERMEDIO

MODELO AVANZADO

Masa de agua (g):	500
Masa de la botella (g):	50
Volumen de la botella (l):	1
Radio de la botella (mm):	50
Radio salida del chorro (mm):	10
Presión de hinchado (bar):	3
Tiempo de simulación (s):	10
Número de iteraciones:	4000

¡CALCULA!



Cohetes de agua como recurso educativo: desde la motivación científicotecnológica hasta la participación en un concurso

# Simulación

## Simulador on-line

El funcionamiento del simulador es sencillo.

1. Se pincha con el ratón sobre el cuadro con el nombre del modelo a utilizar.
2. Se introducen los datos correspondientes en las distintas celdas que aparecen a la derecha de cada parámetro.
3. Se pincha en el botón ¡CALCULA!
4. Tras un breve intervalo de tiempo, aparecerán varias gráficas.

## Simulador del I Concurso de Cohetes de Agua (Water Rockets)

MODELO BÁSICO	MODELO INTERMEDIO	MODELO AVANZADO
Masa de agua (g):	500	
Masa de la botella (g):	50	
Volumen de la botella (l):	1	
Radio de la botella (mm):	50	
Radio salida del chorro (mm):	10	
Presión de hinchado (bar):	3	
Tiempo de simulación (s):	10	
Número de iteraciones:	4000	
<input type="button" value="¡CALCULA!"/>		

# Simulación

## Simulador on-line

A continuación se pueden analizar los resultados.

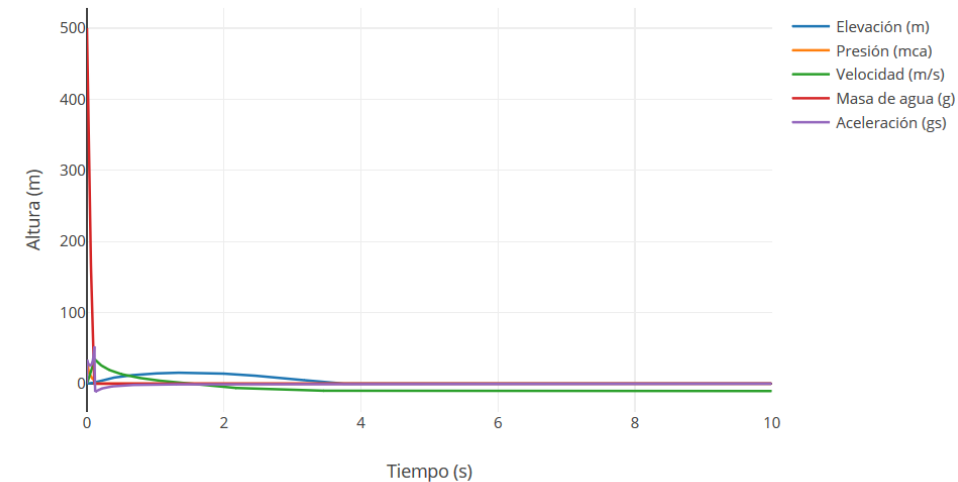
1. La altura máxima del cohete aparece indicada justo debajo del botón ¡CALCULA!
2. Debajo de ella, aparece un gráfico con varias curvas. El eje horizontal se corresponde con el tiempo.
3. A la derecha aparece una leyenda en colores indicando a qué corresponde cada una de las curvas que aparecen representadas, así como las unidades correspondientes.
4. Es posible dejar de visualizar una curva pinchando con el ratón sobre el color correspondiente en la leyenda.
5. Es posible volver a visualizarla pinchando de nuevo sobre ella.
6. Si colocamos el cursor sobre una curva nos mostrará los valores reales.

Tiempo de simulación (s):  OK!

Número de iteraciones:  OK!

¡CALCULA!

Altura máxima de 15.41 m.



# Simulación

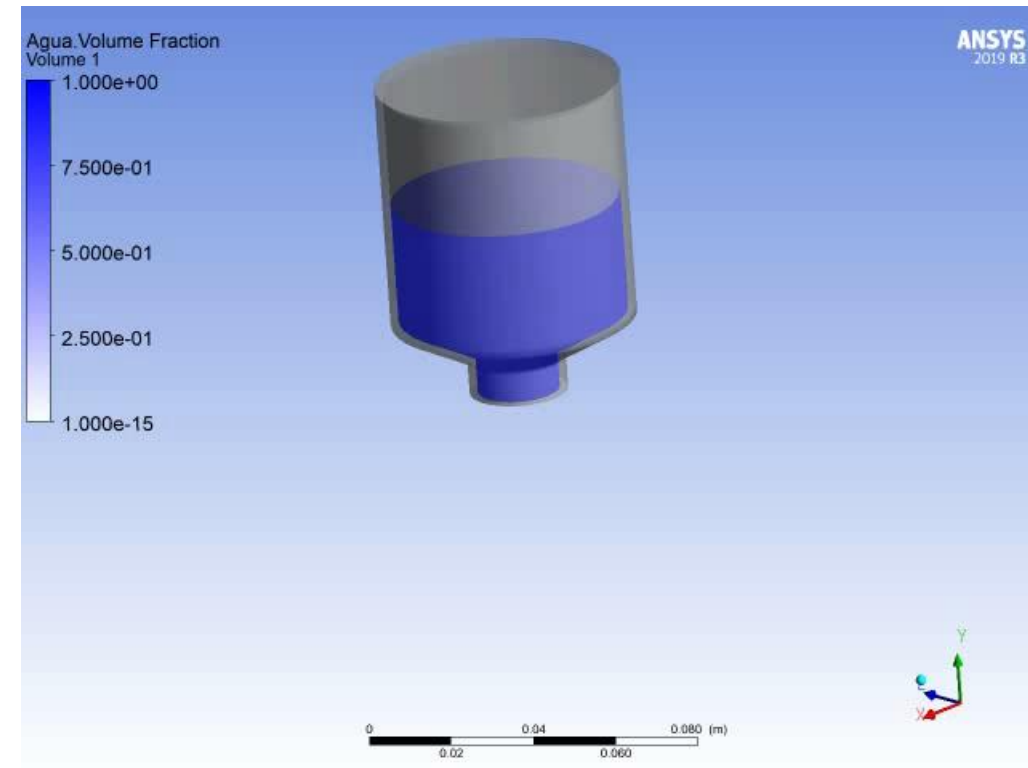
## Simulador on-line

Simulaciones de mecánica computacional de fluidos.

Son simulaciones mucho más realistas, pero también mucho más complejas, tanto en lo que se refiere a los modelos matemáticos que se usan para representar el comportamiento del sistema, como en lo que se refiere al algoritmo numérico para resolverlo.

Son una herramienta muy potente, que permite visualizar lo que ocurre en todo el volumen del cohete, sin realizar aproximaciones.

Como contrapartida, una simulación de estas características puede tardar varias horas en resolverse en un ordenador convencional.



# Simulación

## Influencia de parámetros

Finalmente, proponemos hacer una serie de ejercicios utilizando el simulador *on-line*:

- 1) Influencia del número de iteraciones.
- 2) Influencia de la presión de hinchado.
- 3) Influencia del volumen del depósito.
- 4) Influencia de la masa inicial de agua.
- 5) Influencia del radio del depósito.
- 6) Influencia del radio de la salida del jet.

Para cada uno de estos estudios, se ha de variar únicamente la variable cuya influencia se quiere comprobar, dejando las demás constantes. Hay que tener en cuenta que este es un modelo básico, por lo que es susceptible de proporcionar valores sin sentido si llevamos los valores de los distintos parámetros a valores muy extremos.

**WATER  
ROCKETS**